UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BOLOGNA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Soluzione di sistemi fisici lineari col metodo delle interdizioni

Tesi di Laurea di
CORRADO BROGI

Relatore
Chiar.mo Prof. Ing. FILIPPO CIAMPOLINI

Anno Accademico 1967-68

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BOLOGNA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Soluzione di sistemi fisici lineari col metodo delle interdizioni

Tesi di Laurea di
CORRADO BROGI

Relatore
Chiar.mo Prof. Ing. FILIPPO CIAMPOLINI

Anno Accademico 1967-68

INDICE

- Premessa.....Pag. I
- Il metodo delle interdizioni..... " 1
- Estensione del metodo delle interdizioni..... " 3
- Estensione del metodo a circuiti con più generatori..... " 13
- Reti elettriche soddisfacenti il teorema di reciprocità..... " 17
- Applicazioni particolari del metodo ..... " 18
- Utilizzazione del metodo per ricavare formule risolutive - autosemplificazione dei calcoli..... " 19
- Estensione del metodo a campi non elettrici... " 24
- Applicazione del metodo alla scienza delle costruzioni..... " 25
- Conclusione..... " 31

APPENDICE 1

- Calcoli su un circuito elettrico..... " 33

APPENDICE 2

- Trasformazioni triangolo-stella..... 38

APPENDICE 3

- Metodo delle interdizioni..... 39

TAVOLE : I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.

PREMESSA

Chi si accinge a calcolare un circuito elettrico complesso, o una struttura a molte iperstatiche, o un qualsiasi problema tecnico, che, direttamente o indirettamente, implichi un sistema lineare di N equazioni in N incognite, cerca di impiantare i suoi calcoli con metodi diversi, ben sapendo come sia difficile raggiungere la "certezza" che i risultati non sono affetti da errori accidentali e che l'approssimazione non è inferiore a quella proposta.

Fra i vari metodi di soluzione si distinguono: i metodi generali ed i metodi particolari, questi ultimi più semplici, quando siano correttamente applicati al caso specifico.

Un'altra classifica fra i metodi di soluzione è quella che distingue: "metodi esatti" e "metodi approssimati". Quest'ultima classifica può dare adito a diverse interpretazioni sulle parole "esatto" e "approssimato". In questo studio chiameremo esatti quei metodi che consentono di poterci approssimare quanto vogliamo al valore numerico esatto. Sono quindi da ritenersi esatti vari metodi di

soluzione di sistemi di equazioni: (Cramer, Gauss, ecc.), i metodi per iterazione (Cross, Kani, ecc.) e infine è da classificare fra i metodi esatti IL METODO DELLE INTERDIZIONI, oggetto del presente studio.

Chiameremo invece approssimati quei metodi che, per semplificare i calcoli, introducono condizioni non esattamente vere, o trascurano fattori che pur non influenzando notevolmente il risultato finale, impediscono, anche volendo, di raggiungere approssimazioni migliori di quelle previste dal procedimento. Rientrano in questa categoria anche i metodi empirici o semi-empirici che si avvalgono di dati sperimentali o statistici, capaci tal volta di fornire solo l'ordine di grandezza dell'incognita cercata.

LA TECNICA DEL CALCOLO NEI METODI CLASSICI

Supponiamo di aver trovato N correlazioni lineari indipendenti fra le N incognite del nostro problema e di aver quindi scritto il sistema di N equazioni lineari.

L'esame preliminare del sistema, permette in genere di prevedere quale metodo o quali metodi comportino minore laboriosità per raggiungere il voluto grado di pre

cisione nei calcoli.

Noi esamineremo brevemente alcuni aspetti della regola di Cramer sui determinanti e del metodo di Gauss per successive eliminazioni,(1) allo scopo di porre in evidenza come, sfruttando anche al massimo i metodi classici, ne emerga la generalità e la snellezza del METODO DELLE INTERDIZIONI.

Il metodo di Cramer risulta in generale piuttosto laborioso. Per equazioni omogenee, correlanti ciascuna solo un limitato numero delle N incognite prive di coefficienti, com'è il caso delle equazioni ai nodi di un circuito elettrico (Kirchhoff), si può con opportuna numerazione dei nodi stessi, fare in modo che il primo quadrante a sinistra in alto della matrice del determinante dei coefficenti sia costituito dalla diagonale principale composta di sole unità e tutti gli altri elementi siano nulli.(2) Ciò rende rapidissima la risoluzione del determinante, ed è utile anche quando si sostituisca la

---

(1) Alcuni metodi di risoluzione dei sistemi di equazioni lineari sono anche riportati nel cap.XX dell'opera di O. Belluzzi: "Scienza delle costruzioni".

(2) Ciò può esprimersi più semplicemente dicendo che le equazioni ai nodi possono dare un "cracoviano canonico unitario"(T.Banachiewicz).

colonna dei termini noti alla colonna dell'incognita in calcolo. Conviene in questi casi ridurre la prima riga del determinante ad elementi tutti nulli salvo il primo a sinistra che risulta pari all'unità. Per evitare le successive trascrizioni della matrice (che possono esse re fonte di errori), è conveniente operare le successive riduzioni su carta lucida utilizzandone la trasparen za.

Metodo di Gauss

Il metodo di Gauss per successive eliminazioni con sente in generale una più sollecita risoluzione del sistema di equazioni, soprattutto se operiamo accorgimenti tali da ottenere espressioni il più semplici possibi le.

Le equazioni ai nodi di un circuito elettrico (Kir chhoff) saranno composte da tanti termini quanti sono i rami che si dipartono dal nodo in esame. I termini sono le incognite: alcune figureranno una sola volta nelle e quazioni scritte, altre più volte. Conviene risolvere subito, nelle equazioni ai nodi, quelle incognite che fi gurano una sola volta in funzione di quelle che figurano più volte; in tal modo si hanno espressioni più sempli

ci che, sostituite nelle altre equazioni (alle maglie) permettono di eliminare la metà delle incognite stesse. Un esempio è riportato nell'appendice 1.

METODI PARTICOLARI

Il problema da risolvere, sia esso un circuito elettrico od una struttura a molte iperstatiche, presenta, ad un esame preliminare, certe condizioni di simmetria od antisimmetria (nella sua configurazione e per il regime di generatori o carichi operanti) tali da fornire risoluzioni semplici ed immediate del problema, o almeno da ridurre il numero delle incognite.

Un esempio è riportato in appendice.

Nel caso particolare dei circuiti elettrici la trasformazione triangolo-stella può essere effettuata in modo da rendere più semplici i calcoli. (Cfr. appendice 2)

ERRORI ACCIDENTALI

Il controllo che i risultati dei calcoli verifica-

no le equazioni iniziali, non è sufficiente per garantire l'assenza di errori accidentali anche grossolani; infatti l'errore può risiedere nell'impostazione stessa delle correlazioni.

Il METODO DELLE INTERDIZIONI, avvalendosi di una impostazione che differisce dai metodi a tutt'oggi tradizionali, oltre al calcolo diretto consente una valida verifica.

APPROSSIMAZIONE

Una volta fissate le condizioni iniziali del problema e convenuto di trascurare certe condizioni,(1) la cui influenza è piccola nel caso in esame, e quindi implicitamente ammesso un piccolo errore nei risultati, occorre considerare un altro tipo di approssimazione e cioè l'approssimazione numerica nelle cifre significative che esprimono i valori delle incognite. Nei metodi di calco

---

(1) Per esempio, in certi circuiti elettrici, la variazione di resistenza con la temperatura; oppure, in strutture elastiche, le deformazioni dovute allo sforzo normale ed allo sforzo tagliante, in certi casi, possono essere trascurabili rispetto a quelle dovute al momento flettente.

lo per iterazione l'approssimazione migliora ad ogni ciclo dei calcoli, ma se la convergenza è lenta, i calcoli diventano laboriosissimi e possono protrarsi all'infinito.

In altri metodi può accadere che, procedendo per via numerica, con valori espressi in forma decimale aventi un limitato numero di cifre, le cifre trascurate nei primi valori calcolati, per effetto delle successive operazioni aritmetiche, arrivino ad incidere, anche sensibilmente, nelle cifre significative dei valori delle incognite, talvolta compromettendo la precisione che ci eravamo proposti. E' evidente che il numero delle cifre nelle operazioni aritmetiche è condizionato dalla capacità della calcolatrice a disposizione dell'operatore.

Nel caso però del METODO DELLE INTERDIZIONI, è possibile procedere con un sistema di calcolo sotto forma frazionaria che si autosemplifica nel corso delle operazioni; si ottengono così risultati finali in forma frazionaria abbastanza semplici ed assolutamente esatti. Negli esempi riportati[1] è possibile apprezzarne la semplicità e l'esattezza.

---

[1] Vedi tavole I, II, V.

GENERALITA' DI APPLICAZIONE

Il METODO DELLE INTERDIZIONI risulta applicabile a tutti i problemi che implicano correlazioni lineari fra certe grandezze riguardate come cause ed altre grandezze riguardate come effetti, quando valga il principio della sovrapposizione degli effetti.

Nei casi per i quali vale il teorema di reciprocità, il metodo delle interdizioni ammette semplificazioni notevoli nel procedimento dei calcoli.

Oltre che ripetere i calcoli in forma frazionaria, presenteremo nel nostro studio esempi[1] nei quali si ricava, col METODO DELLE INTERDIZIONI, la formula algebrica risolutiva di un problema. In particolare studieremo le applicazioni del metodo nel campo della Scienza delle costruzioni.

---

[1] Vedi tavole III, IV, V, VI, VII, VIII.

METODO DELLE INTERDIZIONI

IL METODO DELLE INTERDIZIONI

La prima impostazione del METODO DELLE INTERDIZIONI nelle sue fondamenta, risale al 1963 e fu pubblicata in un articolo sulla rivista "L'ELETTROTECNICA".(1) In tale articolo sono esposti i concetti basilari del metodo.

In questo metodo, il principio della sovrapposizione degli effetti viene utilizzato in modo veramente originale. Introdotto il concetto di f.e.m. di interdizione come quella f.e.m. che applicata in un ramo qualsiasi di un circuito elettrico, assume un valore tale da rendere nulla l'intensità di corrente in quel ramo;(2) inserite al circuito in calcolo, tante f.e.m. di interdizione in modo tale da ridurre il numero dei rami attivi, si rende così estremamente semplice il calcolo delle correnti che circolano in essi per effetto del generatore, e per effetto delle singole f.e.m. d'interdizione considerate se

---

(1) F. CIAMPOLINI: Un metodo di soluzione dei circuiti lineari - "L'ELETTROTECNICA", n° 10, vol.L, 1963.

(2) Il ramo interdetto è come se fosse tagliato quando si considera il regime della sua interdizione.
E' evidente che una opportuna scelta dei rami da interdire (sopprimere) semplifica il procedimento; come nella scienza delle costruzioni si sopprimono i vincoli sovrabbondanti nelle strutture iperstatiche; oppure si considerano bloccati certi spostamenti.

condo una certa sequenza, sulla cui scelta avremo occasione di tornare.

Per semplicità, considerando un solo generatore E_j agente nel ramo j, ed una sola f.e.m. di interdizione K_{jr}, agente nel ramo r [1] quando il generatore è nel ramo j, si hanno le tre fasi di calcolo qui sotto schematizzate:

I° Fase - agenti: E_j ; K_{jr} provocano: $I_t + I_{t(b')}$

II° Fase - " K_{rj} ; $-K_{jr}$ " $I_{t(c)} - I_{t(b')}$

III° Fase - " $-K_{rj}$ " $-I_{t(c)}$

---

addizionando: E_j provoca: I_t

I_t, $I_{t(b)}$, $I_{t(c)}$ sono le correnti effettive in un ramo generico t del circuito reale non interdetto, causate rispettivamente da E_j , K_{jr} e K_{rj} .

K_{rj} è la f.e.m. d'interdizione del ramo j quando nel ramo r vi è un generatore $E_r = 1$.

---

(1) Nell'articolo citato la f.e.m. di interdizione è simboleggiata: $E_{b(r)}$ ove le lettere a, b, c, indicano rispettivamente le tre fasi. Poichè tale simbolismo è variato nelle pubblicazioni successive, per uniformità, abbiamo assunto il nuovo simbolismo.

ESTENSIONE DEL METODO DELLE INTERDIZIONI

La semplicità, la generalità e le possibili estensioni del metodo, sia a circuiti con più generatori, sia ad altre branche della scienza, già accennate nell'articolo citato, sono state via via sviluppate in pubblicazioni successive, dimostrando la fecondità dell'idea originaria.

In un succesivo articolo,[1] lo schema di realizzazione appare modificato, si semplifica il procedimento, estendendone le possibilità di applicazione.

I vari regimi di funzionamento di un circuito si indicano con la lettera R avente per indice il numero del ramo ove agisce il generatore di valore unitario e per apici i numeri indicativi dei rami interdetti; cioè:

R_1 indica il regime iniziale con generatore unitario nel ramo 1.

E R_1 indica il regime iniziale con generatore di f.e.m. E nel ramo 1.

R_1^2 indica il regime con generatore unitario nel ramo 1 e f.e.m. di interdizione nel ramo 2.

---

(1) F.CIAMPOLINI - R.TROILI: Estensione del metodo delle interdizioni per il calcolo dei circuiti elettrici - "L'ELETTROTECNICA", nº 8, vol. LIII, 1966.

Le f.e.m. di interdizione si identificano con la lettera K affetta da indici ed apici; il primo indice è il numero del ramo ove è inserito il generatore, il secondo indice è il numero del ramo ove agisce tale K; gli apici indicano gli altri rami interdetti. Se è solo interdetto il ramo 2 sarà: K_{12} la f.e.m. di interdizione.

Consideriamo ora la f.e.m. $-K_{12}$ come un generatore agente nel ramo 2 ed aggiungiamo una f.e.m. di interdizione nel ramo 1 ove era il generatore inizialmente.

La f.e.m. $-K_{12}$ non è unitaria; pertanto il regime sarà: $-K_{12}R_2^1$. La f.e.m. di interdizione del ramo 1 quando agisce un generatore unitario nel ramo 2, è: K_{21}, ma essendo il valore del generatore pari a $(-K_{12})$ avremo nel ramo 1 complessivamente la f.e.m. di interdizione: $-K_{12}K_{21}$. In generale per tutte le altre grandezze vale il regime: $-K_{12}R_2^1$.

Si vuol dimostrare che questo nuovo regime $-K_{12}R_2^1$ addizionato al regime R_1^2 darà un certo regime che sta in rapporto costante col regime effettivo originario R_1.

A tale fine consideriamo un generico ramo t del circuito originario nel quale la E unitaria agente nel ramo 1 provochi la corrente I_t [1].

---

[1] Se la E non fosse unitaria la corrente del ramo t sarebbe: EI_t. (Siamo cioè nel regime R_1).

Se nello stesso circuito originario, privo di altri generatori, consideriamo la f.e.m. di interdizione K_{12} (non unitaria), come un generatore agente nel ramo 2, essa provocherà nello stesso ramo t una corrente che indicheremo: $K_{12}I'_t$.

Se la E_1 (unitaria) e la K_{12} rispettivamente nei rami 1 e 2, agiscono contemporaneamente si ha il regime R_1^2 e la corrente nel ramo t sarà: $I_t + K_{12}I'_t$.

Per il regime $-K_{12}R_2^1$ avremo che la f.e.m. $-K_{12}$ agente nel ramo 2 provocherà in t la corrente $-K_{12}I'_t$. La f.e.m. di interdizione del ramo 1 sarà: $-K_{12}K_{21}$ [1] e provocherà in t la corrente: $-K_{12}K_{21}I_t$ (cfr. nota pag.4).

Sovrapponendo gli effetti dei due regimi R_1^2 e $-K_{12}R_2^1$ si ha:

$$(I_t+K_{12}I'_t) + (-K_{12}I'_t - K_{12}K_{21}I_t)$$

cioè:

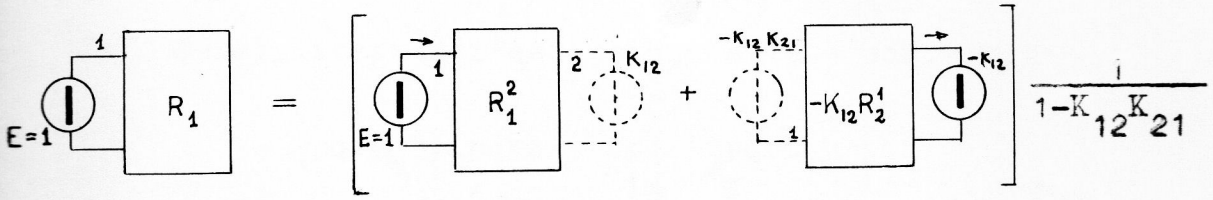
$$\left[R_1^2 + (-K_{12}R_2^1)\right] = \left[I_t (1 - K_{12}K_{21})\right]$$

Quindi per ottenere R_1 (cioè per ottenere I_t) dovremo dividere i risultati della sovrapposizione degli effetti per $(1-K_{12}K_{21})$.

---

[1] Se la $-K_{12}$ fosse unitaria la f.e.m. di interdizione nel ramo 1 sarebbe semplicemente K_{21}.

Si può ora schematizzare il procedimento, indicando semplicemente con un rettangolo un circuito comunque complesso e ponendo in evidenza solo i rami interessati:



oppure algebricamente:

$$(1) \qquad R_1 = (R_1^2 - K_{12}R_2^1)\,\frac{1}{1-K_{12}K_{21}}$$

ed anche:

$$(1') \qquad R_1 = (R_1^2 - K_{12}R_2^1)\,\alpha_{12}$$

ove si è posto:

$$(2) \qquad \frac{1}{1-K_{12}K_{21}} = \alpha_{12}$$

cioè in generale:

$$\frac{1}{1-K_{mn}K_{nm}} = \alpha_{mn}$$

che si denomina coefficiente di interdizione

Estendendo il concetto della formula (1) possiamo porre:

$$(3) \qquad R_1^2 = (R_1^{2,3} - K_{13}^2 R_3^{2,1})\,\frac{1}{1-K_{13}^2 K_{31}^2}$$

Ciò significa che se nel regime R_1^2 resta difficile il calcolo, si può interdire ulteriormente il ramo 3 in modo da semplificare o elementarizzare il procedimento.

Il regime R_1^2 può esprimersi allora con la formula (3). Generalizzando l'estensione si può scrivere:

$$(4) \qquad R_l^{pqr} = (R_l^{pqrm} - K_{lm}^{pqr} R_m^{pqrl}) \propto_{lm}^{pqr}$$

ove l'ulteriore ramo interdetto è il ramo m di un circuito avente il generatore in l e siano già interdetti i rami pqr.

Il coefficente di interdizione si esprime:

$$(5) \qquad \propto_{lm}^{pqr} = \frac{1}{1-K_{lm}^{pqr} K_{ml}^{pqr}}$$

La formula (4) vale per ogni grandezza in tali regimi; per cui, volendo calcolare la f.e.m. di interdizione diventa:

$$(6) \qquad K_{lp}^{qr} = (K_{lp}^{qrm} - K_{mp}^{qrl} K_{lm}^{pqr}) \propto_{lm}^{pqr}$$

La (6), formula fondamentale che permette di ridurre le f.e.m. di interdizione, sta alla base del calcolo per passare dalle tabelle di ordine n alle tabelle di ordine (n - 1).

Le formule esposte implicano già la possibilità di soluzione di un qualsiasi circuito: basta ripetere l'equazione (4) sopprimendo rami fino a che il circuito o i circuiti residui siano calcolabili direttamente, risalendo poi all'equazione (1) per il calcolo definitivo. Nell'articolo sono indicate anche opportune organizzazioni nel procedimento che consentono di snellire i calcoli. In particolare le seguenti fasi di lavoro:

1) Scelta degli n rami da interdire, in modo da ridurre il circuito a "regimi elementari" contenenti (n - 1) rami interdetti.
2) Scelta della sequenza di interdizione.
3) Tabella f.e.m. di interdizione di regimi elementari.
4) Deduzione di altre tabelle di f.e.m. con (n - 2); (n - 3): ..... rami interdetti fino ad un solo ramo interdetto.
5) Calcolo delle grandezze ricercate e compilazione in tabella dei risultati per ciascuno dei regimi elementari.
6) Successive tabelle dedotte dalla (5) fino al caso reale.

Per la sovrapposizione degli effetti possiamo considerare uno alla volta i circuiti elementari, con una sola f.e.m. in uno dei suoi rami (avremo con ciò n circuiti elementari, cioè tanti quanti erano i rami interdetti).

Numereremo i rami del circuito in modo tale da assegnare il numero 1 al ramo contenente il generatore, ed i successivi: 2, 3, ... n ; ai rami da interdire seguendo in ordine la sequenza di interdizione.(1)

La prima tabella da compilare, contenente i valo-

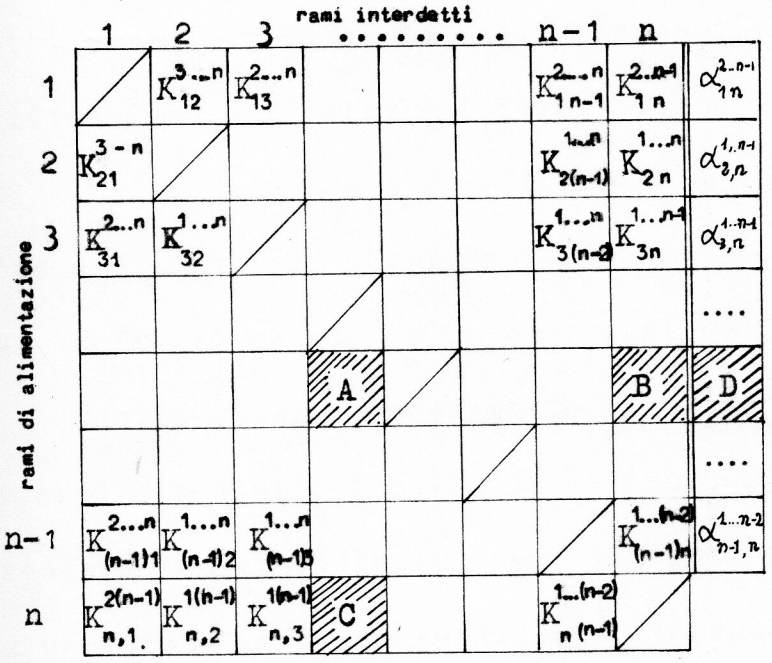


TABELLA DI ORDINE N DELLE f.e.m. di interdizione.

(1) Noteremo in seguito l'opportunità che i rami interdetti siano quelli "caratteristici" di ogni maglia, intendendo per rami caratteristici quelli non comuni a più maglie.-

ri delle f.e.m. di interdizione di ordine n, ha in ascissa i numeri dei rami contenenti le f.e.m. di interdizione, in ordinata i numeri dei rami contenenti le f.e.m. unitarie di alimentazione.

La colonna supplementare dei coefficienti di interdizione, si calcola mediante la formula (5) utilizzando le K simmetriche rispetto alla diagonale della tabella.

Dalla tabella di ordine n si passa alla tabella di ordine n-1, tramite la formula (6). Questa nuova tabella sarà limitata ad n-1 righe ed n-1 colonne, cioè i rami interdetti si sono ridotti di uno. Importantissima per la semplificazione del calcolo è la relazione:(1)

(8) $$a = (A - BC)D$$

dove a è il valore corrispontente ad A, nella nuova tabella. (cfr. lo schema delle due tabelle di fig. 9 e fig. 11)

Con lo stesso procedimento si passa dalla tabella di ordine n-1 alla tabella di ordine n-2, e così via, riducendo, ogni volta, un ramo interdetto, cioè si percorre a ritroso la sequenza di interdizione, fino ad arrivare alla tabella di ordine 2.

---

(1) La relazione (8) non è altro che una schematizzazione della formula (6).

Nella tabella di ordine 2 figurano i dati che, tramite la formula (1) consentono di calcolare il regime R_1.

Rami ove agisce la f.e.m. K di interdizione

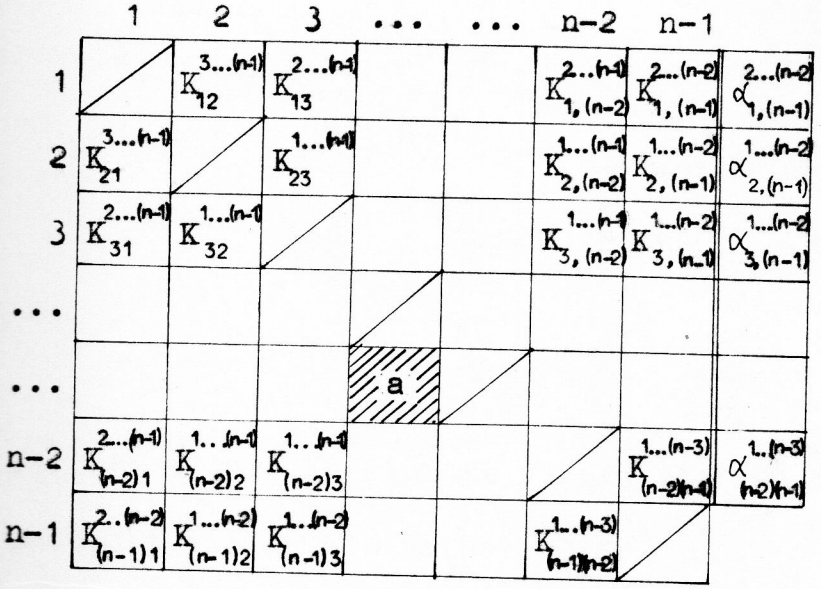
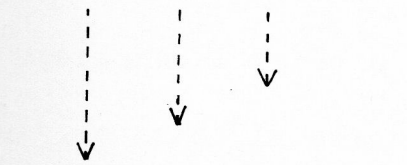


TABELLA DI ORDINE (n-1)



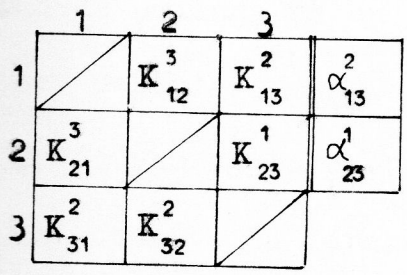


TABELLA DI ORDINE 3

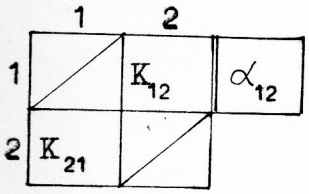
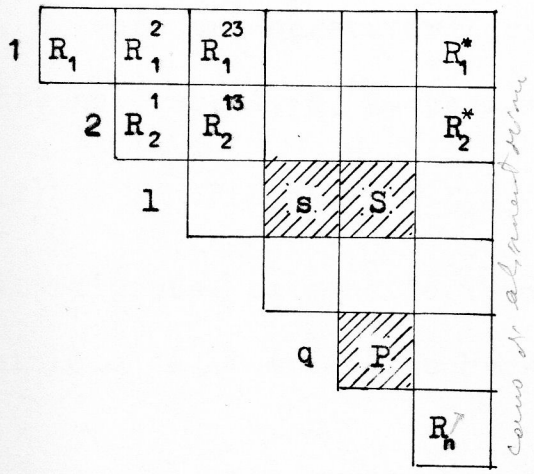


TABELLA DI ORDINE 2

Le singole grandezze [1] nei regimi elementari si contrassegnano con asterisco (R^*) disponendole in un tabulato triangolare ove in ordinate è ancora il ramo aumentato mentre in ascisse figura via via il n° dei rami interdetti e R_1^* equivale a $R_1^{2\ 3\ 4 \ldots n}$.



TABULATO TRIANGOLARE

Considerando l'ultima colonna a destra contenente R^* e spostandosi verso sinistra, diminuiscono i rami interdetti e anche la colonna diminuisce in lunghezza; al termine la colonna ha un solo casello ove trovasi la grandezza cercata.

Il passaggio da una colonna a quella adiacente avviene tramite la formula (4) il valore $s = (S - P\,K_{lq})\alpha_{lq}$ ove K_{lq} ed α_{lq} sono già tabulati.

---

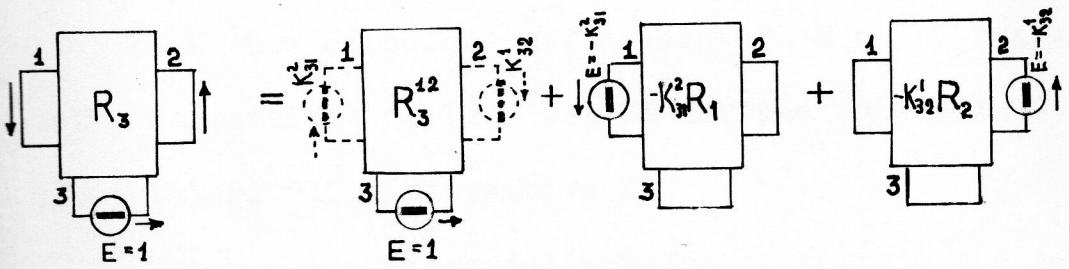
[1] Per esempio le correnti.

ESTENSIONE DEL METODO A CIRCUITI CON PIU' GENERATORI

In base alla simbologia tipica del metodo, se E_1, E_2, E_3 sono tre generatori qualsiasi agenti rispettivamente nei rami 1, 2, 3, potremo scrivere:(1)

$$R(E_1E_2E_3) = E_1R_1 + E_2R_2 + E_3R_3 \qquad (2.2)$$

D'altra parte, se consideriamo il teorema della sovrapposizione degli effetti schematizzato in figura:



si ha la relazione:

$$R_3 = R_3^{12} - K^2_{31}R_1 - K^1_{32}R_2 \qquad (2.3)$$

sostituendo nella (2.2) si ha:

$$R(E_1E_2E_3) = (E_1-E_3K^2_{31})R_1 + (E_2-E_3K^1_{32})R_2 + E_3R_3^{12} \qquad (2.4)$$

Ponendo $E_3 = F_3$; $F_2 = (E_2-E_3K^1_{32})$ la (2.4) diviene:

$$R(E_1E_2E_3) = (E_1-F_3K^2_{31})R_1 + F_2R_2 + F_3R_3^{12} \qquad (2.5)$$

D'altra parte, sempre per il teorema della sovrappo-

---

(1) F.CIAMPOLINI-R.TROILI: Il metodo delle interdizioni nello studio di sistemi fisici lineari con più generatori, "L'INGEGNERE", anno XLII, n° 9, 1968.

sizione degli effetti si ha:

(2,7) $$R_2 = R_2^1 - K_{21}R_1$$

sostituendo nella (2,4),tenendo conto della (2,5) e ponendo : $F_1 = E_1 - F_3K_{31}^2 - F_2K_{21}$ otteniamo:

(2,8) $$R(E_1E_2E_3) = F_1R_1 + F_2R_2^1 + F_3R_3^{12}$$

Chiameremo le F: "f.e.m. ausiliarie" . Ricordando che, nel caso di un generatore le f.e.m. di interdizione sono proporzionali alla f.e.m. del generatore, e che nei tabulati le K sono calcolate per generatori E = 1 , pertanto nelle espressioni delle F , le K saranno moltiplicate per per i valori delle rispettive E.

Per avere un'idea del sistema di calcolo che esprime la (2,8),consideriamo un circuito con i rami 1 e 2 interdetti ed alimentato nel ramo 3 da $F_3 = E_3$, si ha così un regime: $F_3R_3^{12}$. (La E_3 agente nel ramo 3 ha prodotto un regime di correnti diverso da quello reale,avendo due rami interdetti,pertanto a questo regime occorrerà sovrapporre quello delle f.e.m. di interdizione opposte.)

- Inseriamo ora il ramo 2 alimentato effettivamente da E_2 , noi lo consideriamo alimentato da $F_2 = (E_2 - E_3K_{32}^1)$,si ha così il regime $F_2R_2^1$, nel quale l'effetto della f.e.m.

di interdizione del ramo 2, nel regime $F_3R_3^{12}$, non viene interamente eliminato, in quanto, in questa fase è ancora interdetto il ramo 1. (La E_2 ,compresa nella F_2 , produce anch'essa un regime di correnti diverso da quello effettivo,avendo il ramo 1 interdetto,occorrerà quindi sovrapporre l'effetto opposto di tale f.e.m. di interdizione.

Inseriamo ora il ramo 1, (con ciò il circuito è ritornato integro) . Tale ramo,effettivamente alimentato da E_1, noi lo consideriamo alimentato da F_1 espresso da: $F_1 = E_1 - F_3K_{31}^2 - F_2K_{21}$; abbiamo così il regime F_1R_1 nel quale si compensano gli effetti prima non considerati.

E' opportuno notare che una volta calcolato R_1,la diagonale esterna di ciascun tabulato triangolare,riporta i regimi parziali relativi alla grandezza in esame,mentre le f.e.m. di interdizione si leggono direttamente nell'ultima riga in basso di ciascuna tabella (nel caso di tre generatori interessano le tabelle di ordine 2 e di ordine 3). Ciò consente di calcolare speditamente le F e quindi anche le correnti nel caso di più generatori.

Cerchiamo ora di generalizzare la formula già trovata per tre generatori a circuiti con n generatori.

Per le f.e.m. ausiliarie avremo:

$$
\begin{aligned}
F_n &= E_n \\
F_{n-1} &= E_{n-1} - K^{1\ldots(n-2)}_{n,n-1} F_n \\
F_{n-2} &= E_{n-2} - K^{1\ldots(n-1)}_{n,(n-2)} Fn - K^{1\ldots(n-3)}_{(n-1)(n-2)} F_{n-1} \\
&\vdots \\
F_2 &= E_2 - K^{1\ldots(n-1)}_{n,2} F_n - K^{1\ldots(n-2)}_{(n-1),2} F_{n-1} \ldots K^{1}_{32} F_3 \\
F_1 &= E_1 - K^{2\ldots(n-1)}_{n,1} F_n - K^{2\ldots(n-2)}_{(n-1)1} F_{n-1} \ldots K^{2}_{31} F_3 - K_{21} F_1
\end{aligned}
\qquad 2.12)
$$

Il regime risultante $R(E_1, E_2, \ldots E_n)$ sarà:

$$
R(E_1, E_2 \ldots . E_n) = \sum_1^n F_q R_q^{1\ldots(q-1)} \qquad 2.13)
$$

Questa formula vale per qualunque grandezza relativa al circuito purchè valga la sovrapposizione degli effètti. Se la grandezza è una corrente:

$$
I_j(E_1 E_2 \ldots E_n) = \sum_1^j q \; F_q I^{1\ldots(q-1)}_{(j)q} \quad (j=1,2\ldots n) \qquad 2,14)
$$

la sommatoria è limitata a j, essendo $I^{1\ldots(q-1)}_{(j)q} = 0$ per $j > q$ come risulta dai tabulati triangolari.(1) (Tav.I)

---

(1) Le tabelle delle f.e.m. di interdizione forniscono (nell'ultima riga in basso di ciascuna tabella) i coeffi centi che figurano nelle (2.12) per il calcolo delle f. e.m. ausiliarie. I tabulati triangolari forniscono (in corrispondenza della diagonale esterna) i valori dei coef ficenti da introdurre nelle (2.14) per il calcolo delle correnti di maglia.

RETI ELETTRICHE SODDISFACENTI IL TEOREMA DI RECIPROCITA'

Consideriamo due regimi unitari R_1^{mrs}; R_m^{lrs} ove i rami l e m si scambiano le condizioni di maglia alimentata e maglia interdetta; per il principio di reciprocità[1] possiamo scrivere: $K_{lm}^{r,s\ldots} I_{(m)m}^{l,r,s} = K_{ml}^{r,s\ldots} I_{(l)l}^{mrs}$, da cui:

$$\frac{K_{lm}^{rs}}{I_{(l)l}^{mrs}} = \frac{K_{ml}^{rs}}{I_{(m)m}^{lrs}} \qquad (3.3)$$

che relaziona le f.e.m. di interdizione in un certo regime di alimentazione con le correnti in quel regime nel ramo di alimentazione.

Ora le due K relazionate sono simmetriche rispetto alla diagonale principale nella relativa tabella rettangolare. In questo caso il calcolo delle tabelle rettangolari d'interdizione e i tabulati triangolari delle correnti procedono di pari passo. Ripetiamo nella Tav. II il calcolo del circuito di cui alla Tav. I, utilizzando queste semplificazioni.

---

(1) cfr. O.Belluzzi: op.cit., Vol. I, pagg. 621-624.
" U.Puppini: Idraulica, ed.Zanichelli, Bologna, 1947, pagg. 220-241.
cfr. Someda: Elettrotecnica, ed.Patron, Bologna, 1948, pag.26.

APPLICAZIONI PARTICOLARI DEL METODO

I) Introduzione di varianti a circuiti già studiati

Supponiamo che avvenga un corto circuito fra due punti di un circuito già studiato col metodo delle interdizioni. Si nota che aumenta di uno il numero delle maglie; indichiamo con q la maglia aggiunta ed attribuiamo a q il primo posto nella sequenza di interdizione.

Per il calcolo basta aggiungere una colonna ed una riga alle tabelle delle f.e.m. di interdizione ed una riga ai tabulati triangolari già calcolati.

Anche nel caso con più generatori, per le F, l'ulteriore calcolo è relativo alla sola F_q; nota la F_q, la sovracorrente di una generica maglia j-ma è determinata da:

$$\Delta I_{(j)} = F_q I_{(j)q} \qquad (4.1)$$

II) Circuiti con molte f.e.m. di interdizione nulle

Se in un circuito vi sono molte K = 0, è opportuno scegliere una sequenza di interdizione tale da far sì che gli zeri nella tabella delle K si dispongano nell'ultima colonna e in quelle adiacenti. In tal modo si ottengono notevoli semplificazioni nei calcoli.

UTILIZZAZIONE DEL METODO PER RICAVARE FORMULE RISOLUTIVE-AUTOSEMPLIFICAZIONE NEI CALCOLI

Se esprimiamo le grandezze in simboli algebrici, il risultato dei calcoli è evidentemente la formula risolutiva della grandezza cercata.

Inizieremo con esempi molto semplici, dettagliando per il primo i singoli passaggi, e utilizzeremo per brevità un simbolismo particolare, cioè indicheremo con la lettera $\sum_{ijl\ldots}$ la sommatoria delle impedenze $Z_i+Z_j+Z_l+\ldots$ (impedenza delle maglie elementari).

Essendo quindi: $(Z_1+Z_3) = \sum_{13}$; $(Z_2+Z_3) = \sum_{23}$, per il circuito in Tav.III possiamo subito scrivere la "Tabella delle correnti delle maglie elementari" (vedi Tav.III).

Per quanto riguarda i segni si noti che attribuito un segno convenzionale alle correnti (vedi fig. R_1), nel regime R_1^2 il verso della corrente di maglia è determinato dal verso attribuito al generatore cioè il verso indicato su Z_1, e quindi anche in Z_3 il verso è concorde a quello convenzionale della fig.R_1. Nel regime R_2^1 il verso delle correnti di maglia è ancora determinato dal verso del ramo ove è inserito il generatore (concorde su Z_2,

ma discorde su Z_3 rispetto a quello convenzionale) da cui il segno negativo per I_3^*.

Non è difficile calcolare le f.e.m. di interdizione; infatti nel regime R_1^2, la K_{12} è la d.d.p. ai capi di Z_3. In questo regime I_3^* è positivo, ma la d.d.p. è discorde col verso di K_{12}, per cui $K_{12} = \frac{-Z_3}{\Sigma_{13}}$. Per K_{21} è invece negativo I_3^*, da cui $K_{21} = \frac{-Z_3}{\Sigma_{23}}$. Si ha qui solo la tabella di ordine 2. Per il calcolo di: $\alpha_{12} = \frac{1}{1-K_{12}K_{21}}$, consideriamo in generale: $\alpha_{mn} = \frac{1}{1-K_{mn}K_{nm}}$ e sia $K_{mn} = \frac{a}{b}$; $K_{nm} = \frac{c}{d}$; avremo: $\alpha_{mn} = \frac{1}{1 - \frac{a}{b}\frac{c}{d}} = \frac{bd}{bd - ac}$.

Abbiamo così trovato una regola molto semplice: "Il coefficente di interdizione è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei denominatori delle relative K, e per denominatore la differenza fra il prodotto dei denominatori e il prodotto dei numeratori delle stesse K." Si può così scrivere direttamente il valore:

$$\alpha_{12} = \frac{\Sigma_{13}\,\Sigma_{23}}{\Sigma_{13}\,\Sigma_{23} - Z_3^2}$$

Si passa ora al calcolo dei tabulati triangolari per I_1, I_2, I_3. La colonna a destra non è altro che la ripetizione della rispettiva colonna della tabella delle correnti delle maglie elementari, cioè I_1^*, I_2^*, I_3^*. (Si noti che la tabella suddetta diventa inutile nel senso che le I^* possono essere scritte direttamente nell'ultima colonna a destra dei rispettivi tabulati triangolari.)

La compilazione della prima casella è immediata per la nota regola, che comunque ripetiamo per esteso:

$$s = (S - PK_{lq})\alpha_{lq}$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{\sum_{13}} - 0\left(\frac{-Z_3}{\sum_{13}}\right)\right] \frac{\sum_{13}\sum_{23}}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2} = \frac{\sum_{23}}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

$$I_2 = \left[0 - \frac{1}{\sum_{23}}\left(\frac{-Z_3}{\sum_{13}}\right)\right] \frac{\sum_{13}\sum_{23}}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2} = \frac{Z_3}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2} = \frac{Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

$$I_3 = \left[\frac{1}{\sum_{13}} - \left(\frac{-1}{\sum_{23}}\right)\left(\frac{-Z_3}{\sum_{13}}\right)\right] \frac{\sum_{13}\sum_{23}}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2} = \frac{\sum_{23} - Z_3}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2} = \frac{Z_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

Si noti come si possono semplicemente scrivere in ordine le ultime colonne dei tabulati triangolari, le tabelle di ordine di 2 ed i risultati nei tabulati triangolari, semplificando a vista.

Per il ponte di Wheatstone (cfr.Tav.IV), si è ritenuto opportuno numerare con 0 il ramo del generatore considerandolo precedere il ramo 1 nella sequenza di inter-

dizione. In tal modo il simbolismo delle Z è quello classico per tale circuito.

I calcoli sono tutti svolti nella tavola fino alle formule risolutive delle I, dalle quali è possibile verificare che:

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3 = I_0$$

$$I_1 - I_2 = I_3 - I_4 = I_5$$

Le formule esposte nella tavola possono essere ulteriormente semplificate. Infatti si riducono allo stesso denominatore della I_0 dividendo per $\sum_{235}$. Ponendo:

$$D = \sum_{034}\left(\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2\right) - Z_3^2 \sum_{145} - Z_4^2 \sum_{235} - 2Z_3Z_4Z_5,$$

abbiamo:

$$I_0 = \frac{\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2}{D}$$

$$I_1 = \frac{Z_4 \sum_{235} + Z_3Z_5}{D}$$

$$I_2 = \frac{Z_3 \sum_{145} + Z_4Z_5}{D}$$

$$I_3 = \frac{Z_2 \sum_{145} + Z_1Z_5}{D}$$

$$I_4 = \frac{Z_1 \sum_{235} + Z_2Z_5}{D}$$

$$I_5 = \frac{-Z_1Z_3 + Z_2Z_4}{D}$$

ove l'equazione della I_5 eguagliata a zero è la classica

condizione di equilibrio del ponte.

La possibilità di autosemplificazione che il metodo ammette e che è possibile rilevare dagli esempi algebrici ora riportati alle tavole III e IV, appare ancora più evidente se esprimiamo i valcri numerici delle K sotto forma frazionaria con numeratore e denominatore scomposti in fattori primi.

ESTENSIONE DEL METODO A CAMPI NON ELETTRICI

Generalizzando la simbologia del metodo, in un sistema fisico lineare per il quale valga la sovrapposizione degli effetti, chiameremo:

Y_j la causa in "sede j-ma"

X_j l'effetto in "sede j-ma"

($j=1,2...N$)

K_{lm}^{pq} = grandezza di interdizione con la nota simbologia.

Così nel regime R_1^{23} avremo: $Y_1=1$; $X_2=X_3=0$; nelle sedi di 2 e 3 vi saranno delle grandezze di interdizione che saranno: K_{12}^{3}; K_{13}^{2}.

Il procedimento di calcolo è analogo a quello già trattato: 1) tabella degli effetti nelle sedi elementari (X_j^*) (generalmente omessa perchè ripetuta nella colonna estrema a destra dei tabulati triangolari); 2) tabella delle K di interdizione e tabulati triangolari; 3) calcolo delle F; 4) calcolo delle X tramite le formule (2.12), (2.13).

Sono possibili le semplificazioni di calcolo ammesse dal teorema di reciprocità o quelle dovute alla scelta della sequenza in sistemi ove sono molte $K = 0$.

APPLICAZIONE DEL METODO ALLA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Nel campo della scienza delle costruzioni, consideriamo l'applicazione del metodo ai telai piani. Assumeremo come "cause Y_j" le forze e le coppie agenti rispettivamente nei piani e nei nodi.(1) Le "sedi j" sono i piani ed i nodi del telaio in esame. Gli "effetti X_j" sono costituiti dalle traslazioni dei piani e dalle rotazioni dei nodi.

Le grandezze di interdizione K sono le reazioni vincolari (forze o coppie) capaci di interdire gli effetti nella sede di applicazione delle K. Indicheremo inoltre E = modulo di elasticità, J_{ss} = momento di inerzia rispetto all'asse ss della sezione trasversale, l = lunghezza dell'asta.

A) Per telai con nodi che non si spostano riportiamo un esempio di calcolo nella Tav.V.

B) Come applicazioni a strutture con nodi che si spostano consideriamo la struttura della Tav.VI.

Conveniamo di trascurare le deformazioni dovute al

---

(1) Cfr. O.Belluzzi, op.cit., Vol.II, cap.XX, pag.373

lo sforzo normale ed al taglio.(1) Tale convenzione consente di affermare che lo spostamento orizzontale del nodo C è lo stesso di quello del nodo D ed inoltre che il nodo C ed il nodo D non hanno spostamenti verticali.

Come "sedi" indicheremo con 1 il piano di traccia CD, con 2 il nodo C, con 3 il nodo D.

Adotteremo come versi positivi quelli indicati in figura. Indicheremo inoltre con:

$$U_p = \frac{12\, E_1 J_1}{h^3}$$

la rigidezza a traslazione inerente all'impedimento operato da ciascun piedritto, considerato come una mensola la cui sezione estrema libera si sposta senza ruotare.(2)

Chiameremo rigidezza flessionale della struttura CD:

$$W_t = \frac{4\, E_2 J_2}{l} ;$$

chiameremo rigidezza flessionale del piedritto AC o del

---

(1) Convenzione praticata usualmente in questo tipo di strutture poichè l'entità di tali deformazioni è piccolissima rispetto a quelle dovute ai momenti flettenti.

(2) Secondo la teoria dell'ellisse di elasticità si può dire che la forza applicata passa per il baricentro elastico della struttura. Oppure si può considerare la mensola caricata nell'estremo libero da una forza P in direzione normale all'asse della mensola e da un momento $M = \frac{-Ph}{2}$ nel piano individuato dall'asse e dalla retta di azione della forza.

piedritto BD:

$$W_p = \frac{4\ E_1 J_1}{h}$$

Queste rigidezze sono relative all'impedimento operato dalle singole rispettive strutture considerate come mensole con appoggio nella sezione estrema opposta all'incastro; cioè tale sezione può ruotare, ma non può traslare. Ciò equivale a caricare una mensola nella sezione libera con un momento M_p e con una forza $P_p = \frac{3M_p}{2h}$ se si tratta dei pilastri, oppure $P_t = \frac{3M_t}{2l}$ se si tratta della trave.

Indichiamo inoltre con $\theta = \frac{E_1 J_1 l}{E_2 J_2 h} = \frac{W_p}{W_t} = \frac{G_t}{G_p}$, il rapporto fra i pesi elastici della trave e del piedritto. Si ottengono così i seguenti valori: (cfr. Tav. VI)

$$\delta_1 = \delta_C = \delta_D = \frac{Ph^3}{12\ E_1 J_1} \frac{(2\theta+3)}{(\theta+6)}$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_C = \varphi_D = \frac{Plh}{4E_2 J_2} \frac{1}{(\theta+6)}$$

da cui si ricavano i valori dei momenti e delle reazioni vincolari esposti nella stessa tavola.

Se ora vogliamo calcolare la struttura di cui alla Tav.VII ove si è semplicemente cambiata la numerazione delle sedi, attribuendo i numeri 1 e 3 ai nodi ed il n°2

al piano, cioè si è scambiato l'ordine della sequenza rispetto alla Tav.VI, vediamo che i valori nelle tabelle delle grandezze di interdizione sono gli stessi dell'esempio precedente, salvo scambiare la riga 1 con la 2 e la colonna 1 con la 2 . Per cui otteniamo i seguenti risultati:

$$\frac{\varphi_1}{M} = \frac{1}{4E_2J_2}\,\frac{5\theta+8}{(2\theta+1)(\theta+6)}$$

$$\frac{\delta_2}{M} = \frac{h^2}{4E_1J_1}\,\frac{\theta}{(\theta+6)} = \frac{lh}{4E_2J_2}\,\frac{1}{(\theta+6)}$$

$$\frac{\varphi_3}{M} = \frac{1}{4E_2J_2}\,\frac{(3\theta-4)}{(2\theta+1)(\theta+6)}$$

essendo $\theta = \dfrac{lE_1J_1}{hE_2J_2}$

Il secondo risultato poteva essere desunto da un corollario del teorema di Maxwell.[1] $\left(\frac{\delta_2}{M} = \frac{\varphi_2}{P}\right)$

Nella tavola VIII si è ricavata la formula generale per il calcolo di questo tipo di telai. Infatti qualsiasi carico, per il principio di equivalenza,[2] può ridursi alle cause considerate. (Per opportuni confronti, si è nuovamente cambiato l'ordine di sequenza.)

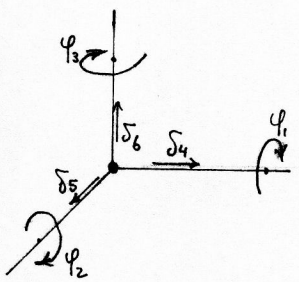
---

(1) Cfr.O.Belluzzi: op.cit., vol.I, cap.XVI, pag.627.

(2) Cfr.O.Belluzzi: op.cit., vol.II, cap.XX, pag.373.

Sistemi spaziali

Il metodo delle interdizioni è anche applicabile ai sistemi spaziali, cioè a strutture considerate nello spazio tridimensionale. In questo caso, riferendosi al suolo considerato fisso, avremo le rotazioni e gli spostamenti (assoluti) di ciascun nodo. In particolare, ogni nodo ha sei gradi di libertà consistenti in tre rotazioni intorno agli assi e in tre spostamenti secondo gli assi. Partendo da questo principio, una struttura astiforme congiungente due nodi avrà quindi tali rotazioni o spostamenti nelle sezioni estreme, da cui è possibile calcolare gli spostamenti relativi di una sezione rispetto all'altra. Se alcune sollecitazioni implicano deformazioni piccolissime, tali da poter essere trascurate (per esempio lo sforzo normale in certe strutture, ecc.), si annulla lo spostamento relativo e cioè la componente dello spostamento lungo l'asse della trave è la stessa per i due nodi.



Assumendo assi opportunamente scelti è possibile ri

durre il numero delle incognite φ_i e δ_j.

Il metodo delle interdizioni resta comunque valido e di facile applicazione.

CONCLUSIONE

La succinta esposizione e gli esempi che abbiamo presentato sul METODO DELLE INTERDIZIONI, possono già fornire un'idea della generalità di applicazione del metodo stesso nei vari campi della scienza.

Si può notare la notevole caratteristica di autosemplificazione dei calcoli sia numerici che algebrici, e la snellezza del procedimento nel ricavare formule algebriche.

In particolare nel campo della scienza delle costruzioni il metodo resta valido nel caso di strutture con nodi che si spostano, e nel caso di strutture spaziali. Inoltre è possibile, volendo, tener conto anche delle deformazioni dovute allo sforzo normale e al taglio.

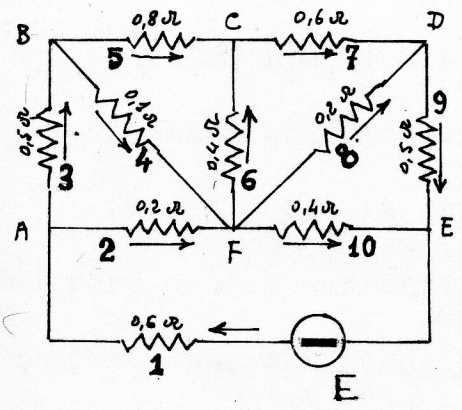
Oltre gli indiscussi pregi di snellezza e generalità del metodo, l'aspetto che ci appare preponderante è la caratteristica per così dire di "autocostruirsi". Cioè una volta fatto un calcolo, questo non rimane fine a se stesso ed al problema risolto, ma è estensibile a strutture via via più complesse oppure alla stessa struttura con grandezze agenti variate, oppure a condi-

zioni diverse della stessa struttura. Nel campo della elettrotecnica, l'interruzione od il corto circuito fra due punti di una rete; l'inserzione o meno di generatori; l'aumento o diminuzione di maglie, ecc. Nel campo della scienza delle costruzioni,le variazioni di carico, o di vincoli, l'ampliarsi delle strutture, ecc.

Tale caratteristica può utilizzarsi anche per il calcolo di formulari. (Abbiamo in proposito riportato esempi molto semplici, poichè la vastità dei problemi che il metodo propone esula dal limite del nostro modesto studio.)

APPENDICE 1

CALCOLI SU UN CIRCUITO ELETTRICO



Il metodo classico, generale, per la risoluzione dei calcoli di un circuito elettrico è da considerarsi l'applicazione dei principi di Kirchhoff.

Quando in una rete complessa si verifica una serie di nodi nei quali concorrono solo tre impedenze, conviene in generale, ai fini del calcolo, scrivere inizialmente le equazioni di tali nodi risolvendo per successiva eliminazione (Gauss) le incognite.

Nel caso in esame iniziamo l'eliminazione delle correnti nei rami ad indice più alto ed avremo:

nodo E) $I_{10} = I_1 - I_9$

" " D) $I_9 = I_8 + I_7$

" " C) $I_7 = I_6 + I_5$

" " B) $I_5 = I_3 - I_4$

" " A) $I_3 = I_1 - I_2$

" " F) (è combinazione lineare delle altre equazioni)

maglia (ABF) $I_3Z_3 + I_4Z_4 - I_2Z_2 = 0$

" " (BFC) $I_4Z_4 + I_6Z_6 - I_5Z_5 = 0$

" " (FCD) $I_6Z_6 + I_7Z_7 - I_8Z_8 = 0$

" " (FDE) $I_8Z_8 + I_9Z_9 - I_{10}Z_{10} = 0$

" " (AEE) $I_1Z_1 + I_2Z_2 + I_{10}Z_{10} = E$

Abbiamo quindi dieci equazioni in dieci incognite.

Si noti come le prime cinque equazioni possano risolvere cinque correnti in funzione delle altre;[1] ciò comporta uno studio di quali incognite sia conveniente porre in evidenza. In particolare si può ricercare quante incognite possono esprimersi in forma monomia, quante binomia, trinomia ecc.

A tale proposito possiamo subito dire che in forma monomia $I_m = I_n$ non dovrebbero risultare equazioni se limitiamo lo studio alle correlazioni fra le correnti dei nodi (salvo il caso di nodo apparente, cioè a due soli rami o assimilabile a tale).

Per i nodi a tre rami le equazioni saranno trinomie e le incognite potranno esprimersi mediante binomi; cioè

---

(1) Se applicassimo i determinanti considerando di risolvere le I con indice da 1 a 5, l'equazione al nodo D correlazionerebbe solo termini noti e quindi il determinante delle incognite sarebbe nullo.

dall'equazione: $I_a - I_b + I_c = 0$ può ricavarsi $I_a = I_b - I_c$, dove I_b e I_c fungono da termini noti. Se interessa la corrente I_1, è necessario che I_1 non venga eliminato.

Nelle 5 equazioni ai nodi figurano 15 termini dei quali dove I_{10}; I_8; I_6; I_4; I_2 figurano una sola volta, I_9; I_7; I_5; I_3; I_1 figurano due volte. Se esprimiamo i valori delle correnti che figurano una sola volta in funzione di quelli che figurano due volte, riusciamo ad avere equazioni trinomie in cui il valore delle incognite è espresso da monomi.

$I_2 = I_1 - I_3$

$I_4 = I_3 - I_5$

$I_6 = I_7 - I_5$

$I_8 = I_9 - I_7$

$I_{10} = I_1 - I_9$

(Si noti che la particolare numerazione adottata comporta l'espressione delle incognite ad indice pari in funzione di quelle a indice dispari.)

Sostituendo le equazioni scritte nelle relazioni ricavate per le maglie si elidono 5 incognite del sistema.

Da quanto esposto, sostituendo le espressioni trovate nel secondo gruppo di equazioni alle maglie, semplificando e ordinando, si ottiene il seguente sistema nel quale figurano solo le cinque incognite con indice dispari, ed un solo termine noto:

$$Z_2 I_1 - (Z_2+Z_3+Z_4) I_3 + Z_4 I_5 = 0$$
$$Z_4 I_3 - (Z_4+Z_5+Z_6) I_5 + Z_6 I_7 = 0$$
$$Z_6 I_5 - (Z_6+Z_7+Z_8) I_7 + Z_8 I_9 = 0$$
$$Z_8 I_7 - (Z_8+Z_9+Z_{10}) I_9 + Z_{10} I_1 = 0$$
$$(Z_1+Z_2+Z_{10}) I_1 - Z_2 I_3 - Z_{10} I_9 = E$$

In questo sistema di equazioni ogni incognita figura tre volte e le equazioni sono trinomie salvo l'ultima. Interessa in particolare ricavare dalle prime quattro equazioni i valori di I_3 ed I_9 in funzione di I_1. Espressioni più semplici si ottengono ricavando I_5 dalla prima e I_7 dalla quarta equazione:

$$I_5 = \frac{(Z_2+Z_3+Z_4) I_3 - Z_2 I_1}{Z_4} \quad ; \quad I_7 = \frac{(Z_8+Z_9+Z_{10}) I_9 - Z_{10} I_1}{Z_8}$$

che sostituite nella seconda e terza equazione portano ad un sistema che, moltiplicato per $Z_4 Z_8$, ordinato e risolto fornisce le espressioni di I_3 ed I_9:

$$I_3 = \frac{N_3}{\Delta} \quad ; \quad I_9 = \frac{N_9}{\Delta} \ ,$$

espressioni che riportate nell'ultima equazione risolvono I_1:

$$I_1 = E \frac{\Delta}{(Z_1+Z_3+Z_{10})\Delta - Z_2 N_3 - Z_{10} N_9}$$

$$N_3 = [Z_4Z_6Z_{10} - Z_2Z_8(Z_4+Z_5+Z_6)][Z_4Z_9^2 - Z_4(Z_6+Z_7+Z_8)(Z_8+Z_9+Z_{10})] - [Z_4Z_6(Z_8+Z_9+Z_{10})][Z_2Z_6Z_8 - Z_4Z_{10}(Z_6+Z_7+Z_8)]$$

$$N_9 = [Z_4^2Z_8 - Z_8(Z_4+Z_5+Z_6)(Z_2+Z_3+Z_4)][Z_2Z_6Z_8 - Z_4Z_{10}(Z_6+Z_7+Z_8)] - [Z_4Z_6Z_{10} - Z_2Z_8(Z_4+Z_5+Z_6)][Z_6Z_8(Z_2+Z_3+Z_4)]$$

$$\Delta = [Z_4^2Z_8 - Z_8(Z_6+Z_5+Z_4)(Z_2+Z_3+Z_4)][Z_4Z_8^2 - Z_4(Z_6+Z_7+Z_8)(Z_8+Z_9+Z_{10})] - [Z_4Z_6(Z_8+Z_9+Z_{10})][Z_6Z_8(Z_2+Z_3+Z_4)]$$

APPLICAZIONE NUMERICA

$Z_1 = 0,6$

$Z_2 = 0,2$ $\qquad (Z_2 + Z_3 + Z_4) = 0,8$

$Z_3 = 0,5$

$Z_4 = 0,1$ $\qquad (Z_4 + Z_5 + Z_6) = 1,3$

$Z_5 = 0,8$

$Z_6 = 0,4$ $\qquad (Z_6 + Z_7 + Z_8) = 1,2$

$Z_7 = 0,6$

$Z_8 = 0,2$ $\qquad (Z_8 + Z_9 + Z_{10}) = 1,1$

$Z_9 = 0,5$

$Z_{10} = 0,4$ $\qquad (Z_1 + Z_2 + Z_{10}) = 1,2$

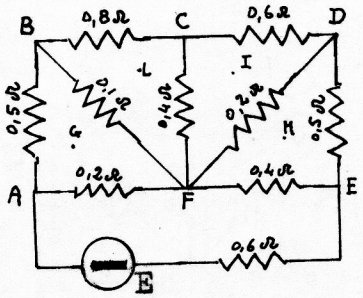
$N_3 = + 0,006016$ $\qquad N_9 = + 0,008896$ $\qquad \Delta = 0,023552$

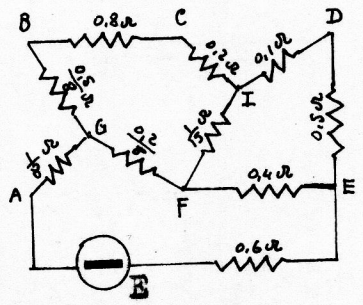
$$(Z_1Z_2Z_{10})\Delta - Z_2N_3 - Z_{10}N_9 = 0,0235008$$

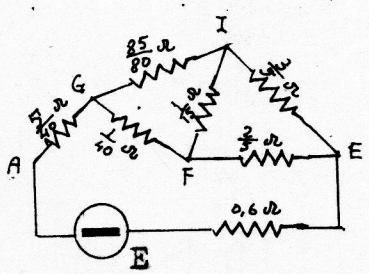
da cui: $\qquad I_1 = E\,\frac{0,0235520}{0,0235008} = \frac{460}{459} = 1,00217864\ldots..$

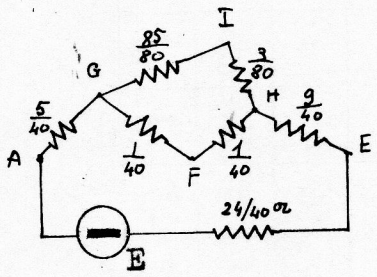
APPENDICE 2

TRASFORMAZIONI TRIANGOLO-STELLA









Triangolo ABF $(0,5 + 0,1 + 0,2)=0,8$

$$Z_{BG} = \frac{1}{16}$$

$$Z_{AG} = \frac{1}{8}$$

$$Z_{FG} = \frac{1}{40}$$

Triangolo FCD $(0,4 + 0,6 + 0,2)=1,2$

$$Z_{IC} = \frac{1}{5}$$

$$Z_{ID} = \frac{1}{10}$$

$$Z_{IF} = \frac{1}{15}$$

Si riduce lo schema alla figura a fianco: $Z_{IDE}=\frac{3}{5}$; $Z_{FE}=\frac{2}{5}$; $Z_{GBCI}=\frac{85}{80}$

Triangolo FEI $\left(\frac{1}{15} + \frac{9}{15} + \frac{6}{15}\right) = \frac{16}{15}$

$$Z_{HI} = \frac{3}{80}$$

$$Z_{HF} = \frac{2}{80}$$

$$Z_{HE} = \frac{18}{80}$$

Sviluppando e riducendo si ha:

$$\left.\begin{aligned} Z_{GIH} &= \frac{11}{10} \\ Z_{GHF} &= \frac{1}{20} \end{aligned}\right\} \; Z_{GH} = \frac{11}{230}$$

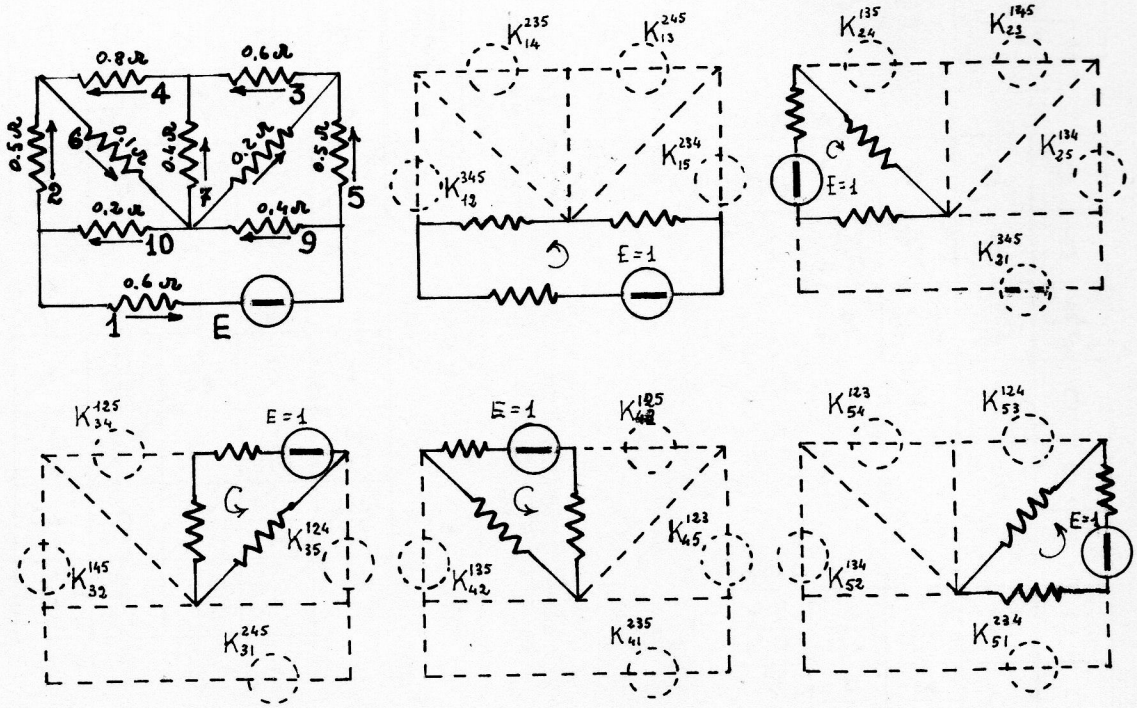
$$Z_{GAEH} = \frac{19}{20}$$

$$Z = \frac{459}{460}$$

$$I_1 = \frac{460}{459} E = 1,0021786 \ldots$$

APPENDICE 3

METODO DELLE INTERDIZIONI



	I_1^*	I_2^*	I_3^*	I_4^*	I_5^*	I_6^*	I_7^*	I_8^*	I_9^*	I_{10}^*
R_1^{2345}	$\frac{5}{6}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
R_2^{1345}	0	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{5}{4}$
R_3^{1245}	0	0	$\frac{5}{6}$	0	0	0	$\frac{-5}{6}$	$\frac{5}{6}$	0	0
R_4^{1235}	0	0	0	$\frac{10}{13}$	0	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{13}$	0	0	0
R_5^{1234}	0	0	0	0	$\frac{10}{11}$	0	0	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{11}$	0

	1	2	3	4	5	
1		$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{33}{29}$
2	$\frac{1}{4}$		0	$\frac{1}{8}$	0	1
3	0	0		$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{33}{32}$
4	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{-4}{13}$		0	1
5	$\frac{-4}{11}$	0	$\frac{-2}{11}$	0		

$\alpha_{15}^{234} = \frac{3\cdot 11}{29}$

$\alpha_{25}^{134} = 1$

$\alpha_{35}^{124} = \frac{3\cdot 11}{2^4}$

$\alpha_{45}^{123} = 1$

1.00217849...

$I_1 = \boxed{\frac{460}{459}}$

-0,2559912....

$I_2 = \boxed{\frac{-235}{918}}$

0,07761437....

$I_3 = 1$

	1	2	3	4	5
1	$\frac{5\cdot 57}{2^3\cdot 3^3\cdot 17}$	$\frac{5\cdot 13}{2^4\cdot 61}$	0	0	0
2		$\frac{-5\cdot 11}{2^6\cdot 23}$	0	0	0
3			$\frac{5\cdot 11\cdot 13}{2^3\cdot 3\cdot 31}$	$\frac{55}{64}$	$\frac{5}{6}$
4				0	0
5					0

	1	2	3	4
1		$\frac{11}{58}$	$\frac{-2}{29}$	0	1
2	$\frac{1}{4}$		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{104}{103}$
3	$\frac{-1}{16}$	0		$\frac{-11}{32}$	$\frac{104}{93}$
4	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{-4}{13}$		

$\alpha_{14}^{23} = 1$

$\alpha_{24}^{13} = \frac{2^3\cdot 13}{103}$

$\alpha_{34}^{12} = \frac{2^3\cdot 13}{3\cdot 31}$

0,04357298.....

$I_4 = 1$

	1	2	3	4	5
1	$\frac{2^2\cdot 5}{3^3\cdot 17}$	$\frac{5}{2^2\cdot 61}$	0	0	0
2		$\frac{-31}{2^2\cdot 13\cdot 23}$	$\frac{-5\cdot 2}{103}$	0	0
3			$\frac{5\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 31}$	0	0
4				$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{13}$
5					0

	1	2	3
1		$\frac{11}{58}$	$\frac{-2}{29}$	$\frac{2697}{2684}$
2	$\frac{26}{103}$		$\frac{4}{103}$	$\frac{9579}{9568}$
3	$\frac{-13}{186}$	$\frac{11}{372}$		

$\alpha_{13}^{2} = \frac{3\cdot 29\cdot 31}{2^2\cdot 11\cdot 61}$

$\alpha_{23}^{1} = \frac{3\cdot 31\cdot 103}{2^5\cdot 13\cdot 23}$

0,3785403....

$I_5 = 1$

	1	2	3	4	5
1	$\frac{5\cdot 139}{2^3\cdot 3^3\cdot 17}$	$\frac{5^2\cdot 7}{2^3\cdot 61}$	$\frac{10}{29}$	$\frac{10}{29}$	0
2		$\frac{-5}{2^5\cdot 23}$	0	0	0
3			$\frac{5\cdot 13}{2^2\cdot 3\cdot 31}$	$\frac{5}{32}$	0
4				0	0
5					$\frac{10}{11}$

	1	2
1		$\frac{47}{244}$	$\frac{44896}{42687}$
2	$\frac{47}{184}$		

$\alpha_{12} = \frac{2^5\cdot 23\cdot 61}{3^4\cdot 17\cdot 31}$

$I_6 = \frac{-5\cdot 13}{2\cdot 3^2\cdot 17}$ $\quad I_7 = \frac{-5^3}{2^3\cdot 3^3\cdot 17}$ $\quad I_8 = \frac{-5\cdot 13}{2^3\cdot 3^3}$ $\quad I_9 = \frac{5\cdot 229}{2^2\cdot 2^3\cdot 17}$ $\quad I_{10} = \frac{5\cdot 137}{2\cdot 3^3\cdot 17}$

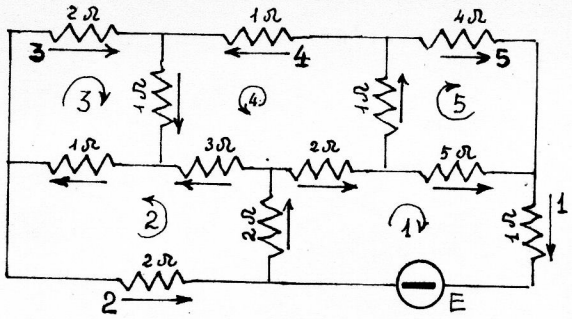
BIBLIOGRAFIA

1) F. CIAMPOLINI: Un metodo di soluzione dei circuiti lineari - "L'ELETTROTECNICA", n° 10, vol. L, 1963.

2) F. CIAMPOLINI - R. TROILI: Estensione del metodo delle interdizioni per il calcolo dei circuiti elettrici - "L'ELETTROTECNICA", n° 8, vol. LIII, 1966.

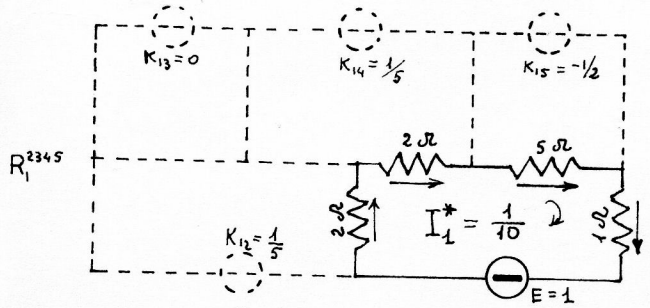
3) F. CIAMPOLINI - R. TROILI: Il metodo delle interdizioni nello studio di sistemi fisici lineari con più generatori - "L'INGEGNERE", anno XLII, n° 9, 1968.

CIRCUITO ELETTRICO	METODO DELLE INTERDIZIONI
caso di un solo generatore	**TAVOLA I**



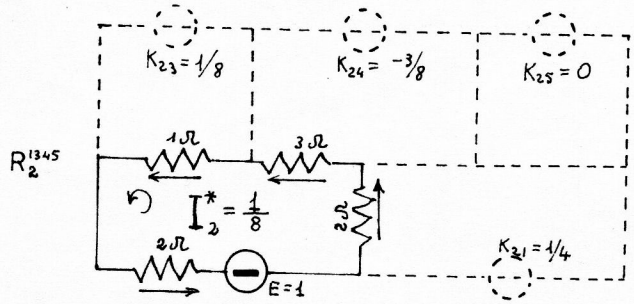
	1	2	3	4	5	
1		$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{4}{3}$
2	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	0	1
3	0	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	0	1
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{80}{79}$
5	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{1}{10}$		

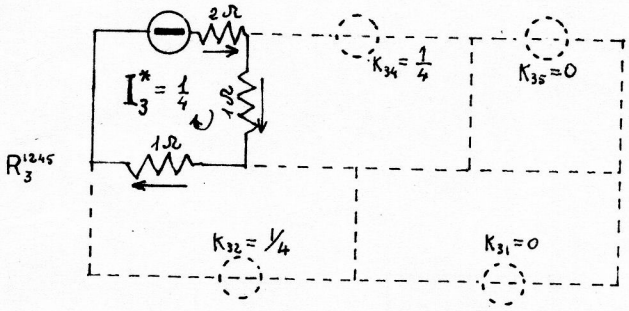
α_{45} α_{25} α_{35}



	1	2	3	4	
1		$\frac{4}{15}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{79\cdot3}{53\cdot2^2}$
2	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{79\cdot2^2}{271}$
3	0	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{79\cdot2}{17\cdot3^2}$
4	$\frac{25}{79}$	$\frac{-30}{79}$	$\frac{10}{79}$		

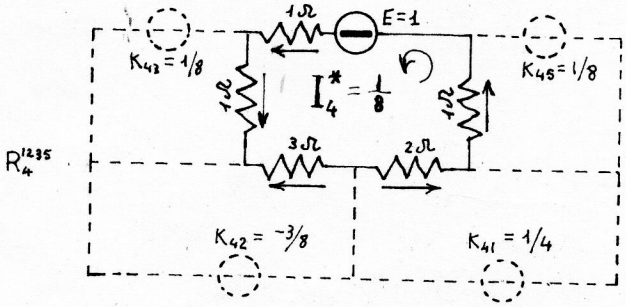
α_{14} α_{24} α_{34}





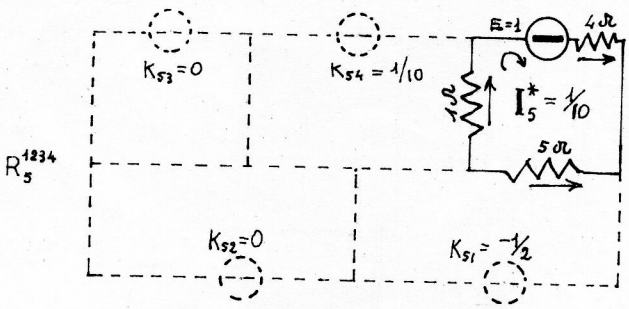
	1	2	3	
1		$\frac{233}{53\cdot5\cdot2}$	$\frac{-5}{53\cdot2}$	$\frac{53\cdot17\cdot3^2\cdot2^2}{409\cdot79}$
2	$\frac{233}{271\cdot2}$		$\frac{109}{271\cdot2}$	$\frac{271\cdot17\cdot3^2\cdot2^2}{1949\cdot79}$
3	$\frac{-5^2}{17\cdot3^2\cdot2}$	$\frac{109}{17\cdot3^2\cdot2}$		

α_{13} α_{23}



	1	2	
1		$\frac{937}{409\cdot5}$	$\frac{1949\cdot409\cdot5}{2539\cdot17\cdot3^2\cdot2^3}$
2	$\frac{937}{1949}$		

α_{12}



$(0,19190626\ldots)$

$I_1 =$

1	$\frac{1949}{4\cdot 2539}$	$\frac{2\cdot 9\cdot 17}{5\cdot 409}$	$\frac{79}{2\cdot 5\cdot 53}$	$\frac{2}{3\cdot 5}$	$\frac{1}{2\cdot 5}$

$(-0,0922607\ldots)$

$I_2 =$

1	$\frac{-937}{4\cdot 2539}$			
2	$\frac{2\cdot 9\cdot 17}{1949}$	$\frac{79}{2\cdot 271}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

$(0,0485427\ldots)$

$I_3 =$

1	$\frac{17\cdot 29}{4\cdot 2539}$	$\frac{5}{409}$		
2	$\frac{-109}{1949}$			
3	$\frac{79}{2\cdot 9\cdot 17}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$	

$(-0,1019102\ldots)$

$I_4 =$

1	$\frac{-5\cdot 9\cdot 23}{4\cdot 2539}$	$\frac{-2^2\cdot 5}{409}$	$\frac{-5}{2\cdot 53}$	
2	$\frac{2\cdot 5\cdot 13}{1949}$	$\frac{3\cdot 5}{271}$		
3	$\frac{-5}{9\cdot 17}$			
4	$\frac{2\cdot 5}{79}$	$\frac{1}{2^3}$		

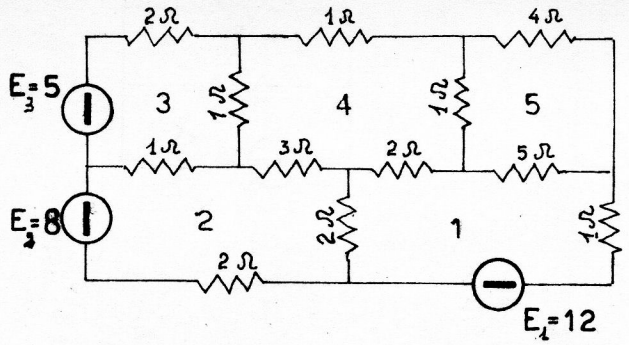
$(0,10614415\ldots)$

$I_5 =$

1	$\frac{49\cdot 11}{2\cdot 2539}$	$\frac{163}{409\cdot 5}$	$\frac{3\cdot 7}{5\cdot 53}$	$\frac{1}{3\cdot 5}$
2	$\frac{-13}{1949}$	$\frac{-3}{2\cdot 271}$	0	
3	$\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 17}$	0		
4	$\frac{-1}{79}$			
5	$\frac{1}{2\cdot 5}$			

Nel disegno dei tabulati triangolari non sono riportate le caselle con valore zero.

CIRCUITO ELETTRICO	METODO DELLE INTERDIZIONI
caso con più generatori	**TAVOLA II**



TEOREMA DI RECIPROCITA'

$$K^{zs}_{ml} = K^{zs}_{lm}\,\frac{I_{(m)m}}{I_{(l)l}}$$

	1	2	3	4	5	α	I^*	
1		$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{10}$	$I^{2345}_{(1)1}$
2			$\frac{1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$I^{1345}_{(2)2}$
3				$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$I^{1245}_{(3)3}$
4					$\frac{1}{8}$	$\frac{80}{79}$	$\frac{1}{8}$	$I^{1235}_{(3)4}$
5	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{1}{10}$			$\frac{1}{10}$	$I^{1234}_{(5)5}$

$$I_{(1)1} = \frac{1949}{4\cdot 2539}$$

$$I_{(1)2} = \frac{-937}{4\cdot 2539}$$

	1	2	3	4	α	I	
1		$\frac{2^2}{3\cdot 5}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3\cdot 79}{2^2\,53}$	$\frac{2}{3\cdot 5}$	$I^{234}_{(1)1}$
2			$\frac{1}{2^3}$	$\frac{-3}{2^3}$	$\frac{2^2\cdot 79}{271}$	$\frac{1}{2^3}$	$I^{134}_{(2)2}$
3				$\frac{1}{2^2}$	$\frac{2\cdot 79}{3^2\cdot 17}$	$\frac{1}{2^2}$	$I^{124}_{(3)3}$
4	$\frac{5^2}{79}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2\cdot 5}{79}$			$\frac{2\cdot 5}{79}$	$I^{123}_{(4)4}$

$$I_{(1)3} = \frac{17\cdot 29}{4\cdot 2539}$$

	1	2	3	α	I	
1		$\frac{233}{2\cdot 5\cdot 53}$	$\frac{-5}{2\cdot 53}$	$\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 17\cdot 53}{409\cdot 79}$	$\frac{79}{2\cdot 5\cdot 53}$	$I^{23}_{(1)1}$
2			$\frac{109}{2\cdot 271}$	$\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 17\cdot 271}{1949\cdot 79}$	$\frac{79}{2\cdot 271}$	$I^{13}_{(2)2}$
3	$\frac{-5^2}{2\cdot 3^2\cdot 17}$	$\frac{109}{2\cdot 3^2\cdot 17}$			$\frac{79}{2\cdot 3^2\cdot 17}$	$I^{12}_{(3)3}$

$$I_{(1)4} = \frac{-3^2\cdot 5\cdot 23}{4\cdot 2539}$$

$$I_{(1)5} = \frac{11\cdot 49}{2\cdot 2539}$$

	1	2	α	I	
1		$\frac{937}{5\cdot 409}$	$\frac{5\cdot 409\cdot 1949}{2^3\cdot 3^2\cdot 17\cdot 2539}$	$\frac{2\cdot 9\cdot 17}{5\cdot 409}$	$I^{2}_{(1)1}$
2	$\frac{937}{1949}$			$\frac{2\cdot 9\cdot 17}{1949}$	$I^{1}_{(2)2}$

Si è ripetuto il calcolo utilizzando il teorema di reciprocità (vedi TAV. I)
(Cfr la colonna delle I con i tabulati triangolari di TAV. I)

CIRCUITO CON PIÚ GENERATORI

$(E_1 = 12\ ;\ E_2 = 8\ ;\ E_3 = 5)$ volt.

calcolo delle f.e.m. ausiliarie

$$F_3 = E_3 = 5$$

(2·12) $$F_2 = \left(E_2 - F_3 K^1_{32}\right) = 8 - 5\,\frac{109}{2\cdot 3^2\cdot 17} = \frac{11\cdot 173}{2\cdot 3^2\cdot 17} = 6,21895\ldots$$

$$F_1 = \left(E_1 - F_3 K^2_{31} - F_2 K_{21}\right) = 12 - 5\,\frac{-5^2}{2\cdot 3^2\cdot 17} - \frac{11\cdot 173}{2\cdot 3^2\cdot 17}\,\frac{937}{1949} = \frac{3\cdot 29\cdot 211}{1949} = 9,4186762\ldots$$

Calcolo delle correnti

(2·14) $$\boxed{I_j\,(E_1, E_2, \ldots E_n) = \sum_1^j{}_q\ F_q\, I^{1\ldots(q-1)}_{(j)q}} \qquad (q = 1, 2, \ldots n)$$

$$I_1(E_1 E_2 E_3) = F_1 I_{(1)1} + 0\ldots = \frac{3\cdot 29\cdot 211}{1949}\,\frac{1949}{4\cdot 2539} = \frac{3\cdot 29\cdot 211}{4\cdot 2539} = \boxed{1,80750295\ldots}$$

$$I_2(E_1 E_2 E_3) = F_1 I_{(1)2} + F_2 I^1_{(2)2} + 0 = \frac{3\cdot 29\cdot 211}{1949}\left(\frac{-937}{4\cdot 2539}\right) + \frac{11\cdot 173}{2\cdot 3^2\cdot 17}\,\frac{2\cdot 3^2\cdot 17}{1949} = \frac{1091}{4\cdot 2539} =$$

$$= \boxed{0,10742418\ldots}$$

$$I_3(E_1 E_2 E_3) = F_1 I_{(1)3} + F_2 I^1_{(2)3} + F_3 I^{1,2}_{(3)3} = \frac{3\cdot 29\cdot 211}{1949}\,\frac{17\cdot 29}{4\cdot 2539} + \frac{11\cdot 173}{2\,3^2\cdot 17}\left(\frac{-109}{1949}\right) + 5\,\frac{79}{2\cdot 3^2\cdot 17} =$$

$$= \frac{14221}{4\cdot 2539} = \boxed{0,1400256\ldots}$$

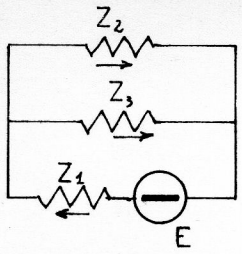
$$I_4(E_1 E_2 E_3) = F_1 I_{(1)4} + F_2 I^3_{(2)4} + F_3 I^{1,2}_{(3)4} + 0\ldots = \frac{3\cdot 29\cdot 211}{1949}\,\frac{5\cdot 3^2\cdot 23}{4\cdot 2539} + \frac{11\cdot 173}{2\cdot 3^2\cdot 17}\,\frac{2\cdot 5\cdot 13}{1949} + 5\,\frac{-5}{3^2\cdot 17} =$$

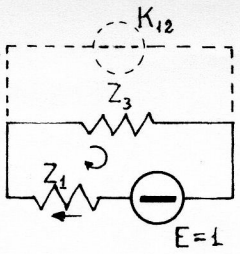
$$= \frac{5\cdot 1439}{4\cdot 2539} = \boxed{0,70844820\ldots}$$

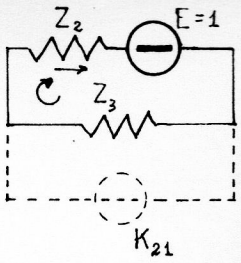
$$I_5(E_1 E_2 E_3) = F_1 I_{(1)5} + F_2 I^3_{(2)5} + F_3 I^{1,2}_{(3)5} + 0 = \frac{3\cdot 29\cdot 211}{1949}\,\frac{7^2\cdot 11}{2\cdot 2539} + \frac{11\cdot 173}{2\cdot 3^2\cdot 17}\,\frac{-13}{1949} + 5\,\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 17} =$$

$$= \frac{7^2\cdot 101}{2\cdot 2539} = \boxed{0,9745962\ldots}$$

I valori delle $I^{1\ldots(q-1)}_{(j)q}$ sono calcolati nei tabulati triangolari di TAV I.







	I_1^*	I_2^*	I_3^*
R_{12}	$\frac{1}{\sum_{13}}$	0	$\frac{1}{\sum_{13}}$
R_{21}	0	$\frac{1}{\sum_{23}}$	$\frac{-1}{\sum_{23}}$

$\alpha_{1,2}$

	1	2
1		$\frac{-Z_3}{\sum_{13}}$
2	$\frac{-Z_3}{\sum_{23}}$	

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sum_{13}\sum_{23}}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2}$$

$$I_1 = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

1	$\frac{\sum_{23}}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2}$ | $\frac{1}{\sum_{13}}$
2	0

$$I_2 = \frac{Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

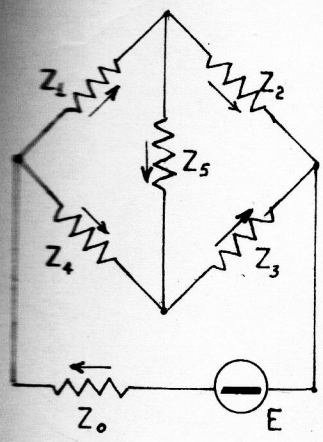
1	$\frac{Z_3}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2}$ | 0
2	$\frac{1}{\sum_{23}}$

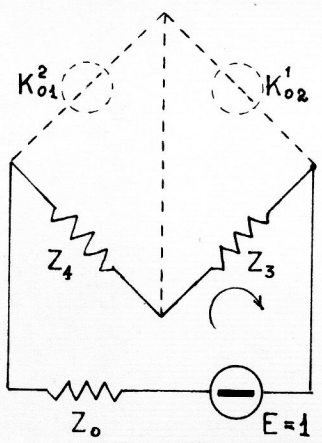
$$I_3 = \frac{Z_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

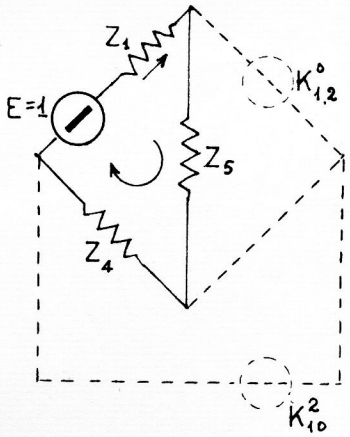
1	$\frac{\sum_{23} - Z_3}{\sum_{13}\sum_{23} - Z_3^2}$ | $\frac{1}{\sum_{13}}$
2	$\frac{-1}{\sum_{23}}$

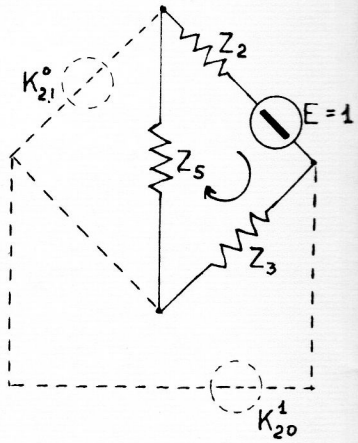
CIRCUITO ELETTRICO	METODO DELLE INTERDIZIONI
resistenze serie - parallelo calcolo delle formule delle correnti	**TAVOLA III**

CIRCUITO ELETTRICO	METODO DELLE INTERDIZIONI
ponte di Wheatstone *calcolo delle formule delle correnti*	**TAVOLA IV**









	I_0^*	I_1^*	I_2^*	I_3^*	I_4^*	I_5^*
$R_0^{'12}$	$\frac{1}{\sum_{034}}$	0	0	$\frac{1}{\sum_{034}}$	$\frac{1}{\sum_{034}}$	0
R_1^{02}	0	$\frac{1}{\sum_{145}}$	0	0	$\frac{-1}{\sum_{145}}$	$\frac{1}{\sum_{145}}$
R_2^{01}	0	0	$\frac{1}{\sum_{235}}$	$\frac{-1}{\sum_{235}}$	0	$\frac{-1}{\sum_{235}}$

	0	1	2	
0		$\frac{-Z_4}{\sum_{034}}$	$\frac{-Z_3}{\sum_{034}}$	$\frac{\sum_{034}\sum_{235}}{\sum_{034}\sum_{235} - Z_3^2}$ α_{02}
1	$\frac{-Z_4}{\sum_{145}}$		$\frac{-Z_5}{\sum_{145}}$	$\frac{\sum_{145}\sum_{235}}{\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2}$ α_{12}
2	$\frac{-Z_3}{\sum_{235}}$	$\frac{-Z_5}{\sum_{235}}$		

$$\alpha_{01}\alpha_{02} = \frac{\sum_{034}\sum_{235}\left(\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2\right)}{\left(\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2\right)\left(\sum_{034}\sum_{235} - Z_3^2\right) - \left(Z_4\sum_{235} + Z_3Z_5\right)^2}$$

scomponendo $\sum_{034} = Z_0 + \sum_{34}$ al denominatore si ha:

$$\alpha_{01}\alpha_{02} = \frac{\sum_{034}}{Z_0 + \sum_{34} - \frac{Z_3^2\sum_{145} + Z_4^2\sum_{235} + 2Z_3Z_4Z_5}{\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2}}$$

	0	1	
0		$\frac{-\left(Z_4\sum_{235} + Z_3Z_5\right)}{\sum_{034}\sum_{235} - Z_3^2}$	$\frac{\left(\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2\right)\left(\sum_{034}\sum_{235} - Z_3^2\right)}{\left(\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2\right)\left(\sum_{034}\sum_{235} - Z_3^2\right) - \left(Z_4\sum_{235} + Z_3Z_5\right)^2}$ α_{01}
1	$\frac{-\left(Z_4\sum_{235} + Z_3Z_5\right)}{\sum_{145}\sum_{235} - Z_5^2}$		

I_0

$E\cdot\dfrac{\left(\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2\right)}{\sum_{034}\left(\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2\right)-Z_3^2\sum_{145}-Z_4^2\sum_{235}-2Z_3Z_4Z_5}$	$\dfrac{\sum_{235}}{\sum_{034}\sum_{235}-Z_3^2}$	$\dfrac{1}{\sum_{034}}$

I_1

$E\cdot\dfrac{\sum_{235}\left(Z_4\sum_{235}+Z_3Z_5\right)}{\left[\left(\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2\right)\left(\sum_{034}\sum_{235}-Z_3^2\right)-\left(Z_4\sum_{235}+Z_3Z_5\right)^2\right]}$	0	
	$\dfrac{\sum_{235}}{\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2}$	$\dfrac{1}{\sum_{145}}$

I_2

$E\dfrac{\sum_{235}\left(Z_3\sum_{145}+Z_4Z_5\right)}{\left[\left(\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2\right)\left(\sum_{034}\sum_{235}-Z_3^2\right)-\left(Z_4\sum_{235}+Z_3Z_5\right)^2\right]}$	$\dfrac{Z_3}{\sum_{034}\sum_{235}-Z_3^2}$	0
	$\dfrac{Z_5}{\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2}$	0
		—

I_3

$E\dfrac{\sum_{235}\left(\sum_{145}\sum_{235}-Z_3\sum_{145}-Z_4Z_5-Z_5^2\right)}{\left[\left(\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2\right)\left(\sum_{034}\sum_{235}-Z_3^2\right)-\left(Z_4\sum_{235}+Z_3Z_5\right)^2\right]}$	$\dfrac{\sum_{235}-Z_3}{\sum_{034}\sum_{235}-Z_3^2}$	$\dfrac{1}{\sum_{034}}$
	$\dfrac{-Z_5}{\sum_{145}\sum_{235}-Z_5^2}$	0
		$\dfrac{-1}{\sum_{235}}$

I_4

$E\,\dfrac{\Sigma_{235}\left(\Sigma_{145}\Sigma_{235}-Z_4\Sigma_{235}-Z_3Z_5-Z_5^2\right)}{\left[\left(\Sigma_{145}\Sigma_{235}-Z_5^2\right)\left(\Sigma_{034}\Sigma_{235}-Z_3^2\right)-\left(Z_4\Sigma_{235}+Z_3Z_5\right)^2\right]}$	$\dfrac{\Sigma_{235}}{\Sigma_{034}\Sigma_{235}-Z_3^2}$	$\dfrac{1}{\Sigma_{034}}$
	$\dfrac{-\Sigma_{235}}{\Sigma_{145}\Sigma_{235}-Z_5^2}$	$\dfrac{-1}{\Sigma_{145}}$
		0

I_5

$E\,\dfrac{\Sigma_{235}\left(-Z_3\Sigma_{145}+Z_4\Sigma_{235}+Z_3Z_5-Z_4Z_5\right)}{\left[\left(\Sigma_{145}\Sigma_{235}-Z_5^2\right)\left(\Sigma_{034}\Sigma_{235}-Z_3^2\right)-\left(Z_4\Sigma_{235}+Z_3Z_5\right)^2\right]}$	$\dfrac{-Z_3}{\Sigma_{034}\Sigma_{235}-Z_3^2}$	0
	$\dfrac{\Sigma_{235}-Z_5}{\Sigma_{145}\Sigma_{235}-Z_5^2}$	$\dfrac{1}{\Sigma_{145}}$
		$\dfrac{-1}{\Sigma_{235}}$

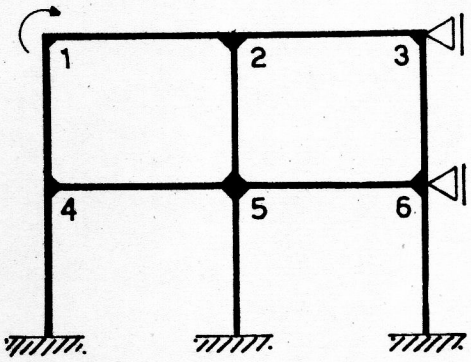
la resistenza ai capi del generatore:

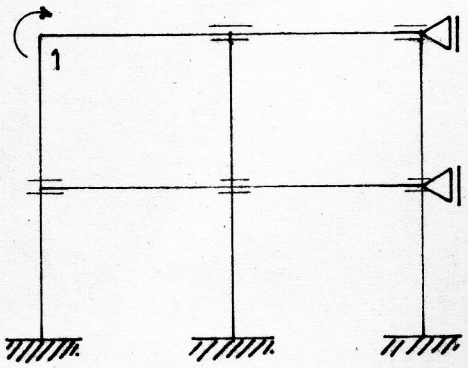
$$\mathbf{Z} = Z_o + \frac{\Sigma}{34} - \frac{Z_3^2\Sigma_{145}+Z_4^2\Sigma_{235}+2Z_3Z_4Z_5}{\Sigma_{145}\Sigma_{235}-Z_5^2}$$

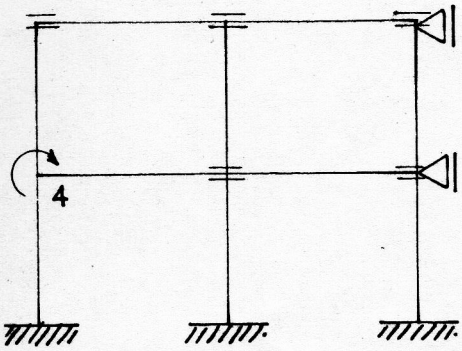
cioè:

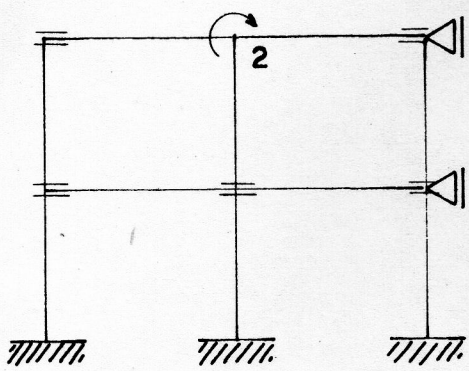
$$\mathbf{Z} = Z_o + \frac{Z_1Z_2Z_3+Z_1Z_2Z_4+Z_1Z_3Z_4+Z_1Z_3Z_5+Z_1Z_4Z_5+Z_2Z_3Z_4+Z_2Z_3Z_5+Z_2Z_4Z_5}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_1Z_5+Z_2Z_4+Z_2Z_5+Z_3Z_4+Z_3Z_5+Z_4Z_5}$$

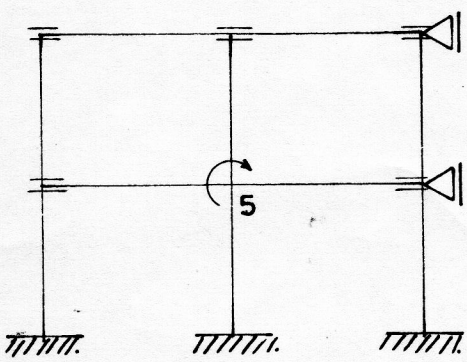
TELAIO PIANO INCASTRATO	METODO DELLE INTERDIZIONI
caso dei nodi che non si spostano	**TAVOLA V**

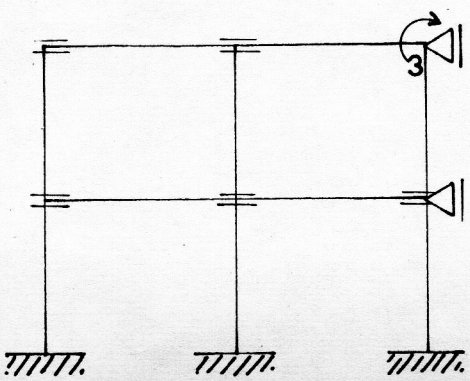

1
2
3
4
5
6

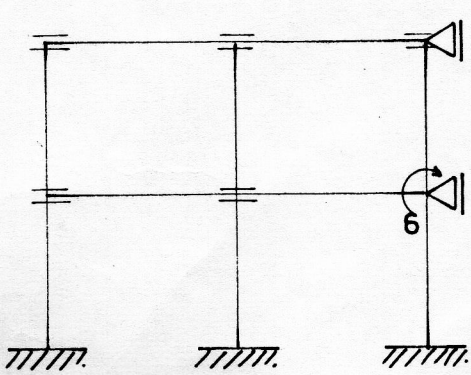

1


4


2


5


3


6

	1	2	3	4	5	6
1		$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1
2	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	1
3	0	$\frac{1}{4}$		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{24}{23}$
4	$\frac{1}{6}$	0	0		$\frac{1}{6}$	0	1
5	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{48}{47}$
6	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$		

$\alpha_{16}^{2345} = 1$ $\quad \alpha_{16}^{2345} K_{16}^{2345} = 0$

$\alpha_{26}^{1345} = 1$ $\quad \alpha_{26}^{1345} K_{26}^{1345} = 0$

$\alpha_{36}^{1245} = \frac{2^3 \cdot 3}{23}$ $\quad \alpha_{36}^{1245} K_{36}^{1245} = \frac{2 \cdot 3}{23}$

$\alpha_{46}^{1235} = 1$ $\quad \alpha_{46}^{1235} K_{46}^{1235} = 0$

$\alpha_{56}^{1234} = \frac{2^4 \cdot 3}{47}$ $\quad \alpha_{56}^{1234} K_{56}^{1234} = \frac{2 \cdot 3}{47}$

	1	2	3	4	5
1		$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	1
2	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{47}{46}$
3	0	$\frac{6}{23}$		0	$\frac{-1}{23}$	$\frac{1081}{1080}$
4	$\frac{1}{6}$	0	0		$\frac{1}{6}$	$\frac{47}{46}$
5	0	$\frac{6}{47}$	$\frac{-1}{47}$	$\frac{6}{47}$	

$\alpha_{15}^{234} = 1$ $\quad \alpha_{15}^{234} K_{15}^{234} = 0$

$\alpha_{25}^{134} = \frac{47}{2 \cdot 23}$ $\quad \alpha_{25}^{134} K_{25}^{134} = \frac{47}{2^2 \cdot 3 \cdot 23}$

$\alpha_{35}^{124} = \frac{23 \cdot 47}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5}$ $\quad \alpha_{35}^{124} K_{35}^{124} = \frac{-47}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5}$

$\alpha_{45}^{123} = \frac{47}{2 \cdot 23}$ $\quad \alpha_{45}^{123} K_{45}^{123} = \frac{47}{2^2 \cdot 3 \cdot 23}$

	1	2	3	4
1		$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1104}{1057}$
2	$\frac{47}{276}$		$\frac{4}{23}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{2116}{2115}$
3	0	$\frac{4}{15}$		$\frac{1}{180}$	$\frac{49680}{49679}$
4	$\frac{47}{276}$	$\frac{-1}{46}$	$\frac{1}{276}$	

$\left(\alpha_{14}^{23} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 23}{7 \cdot 151}\right)$ $\quad \alpha_{14}^{23} K_{14}^{23} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 23}{7 \cdot 151}$

$\left(\alpha_{24}^{13} = \frac{2^2 \cdot 23^2}{3^2 \cdot 5 \cdot 47}\right)$ $\quad \alpha_{24}^{13} K_{24}^{13} = \frac{2 \cdot 23}{3^2 \cdot 5 \cdot 47}$

$\left(\alpha_{34}^{12} = \frac{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 23}{7 \cdot 47 \cdot 151}\right)$ $\quad \alpha_{34}^{12} K_{34}^{12} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 23}{7 \cdot 47 \cdot 151}$

	1	2	3
1		$\frac{282}{1057}$	$\frac{-1}{1057}$	$\frac{1057^2}{1057^2 - 1}$
2	$\frac{47}{270}$		$\frac{47}{270}$	$\frac{47565}{45356}$
3	$\frac{-1}{1057}$	$\frac{282}{1057}$	

$\alpha_{13}^{2} = \frac{7^2 \cdot 151^2}{2^6 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23^2}$ $\quad \alpha_{13}^{2} K_{13}^{2} = \frac{-(7 \cdot 151)}{2^6 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23^2}$

$\alpha_{23}^{1} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 151}{2^3 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29}$ $\quad \alpha_{23}^{1} K_{23}^{1} = \frac{7 \cdot 47 \cdot 151}{2^3 3 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29}$

	1	2
1		$\frac{47}{176}$	$\frac{1041216}{990409}$
2	$\frac{1081}{5916}$	

$\alpha_{12} = \frac{2^6 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 29}{7 \cdot 151 \cdot 937}$ $\quad \alpha_{12} K_{12} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 47}{7 \cdot 151 \cdot 937}$

0,54902...

1	$\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 29}{23 \cdot 937}$	$\frac{7 \cdot 151}{2^3 \cdot 11 \cdot 23}$	$\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 23}{7 \cdot 151}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	0	0	0	0	0
		3	0	0	0	0
			4	0	0	0
				5	0	0
					6	0

$-0,1003200...$

1	$\frac{-2 \cdot 47}{937}$	0	0	0	0	0
	2	$\frac{7 \cdot 151}{2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 29}$	$\frac{2 \cdot 23}{3^2 \cdot 5}$	$\frac{47}{2 \cdot 3 \cdot 23}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
		3	0	0	0	0
			4	0	0	0
				5	0	0
					6	0

0,0272841.....

1	$\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}{23 \cdot 937}$	$\frac{1}{2^3 \cdot 11 \cdot 23}$	0	0	0	0
	2	$\frac{-47}{17 \cdot 29}$	0	0	0	0
		3	$\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 23}{7 \cdot 151}$	$\frac{47}{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$	$\frac{2^2 \cdot 3}{23}$	$\frac{1}{2}$
			4	0	0	0
				5	0	0
					6	0

$0,095772\ldots$

1	$\frac{-2^4\cdot 3\cdot 43}{23\cdot 937}$	$\frac{-3^2\cdot 5}{2\cdot 11\cdot 23}$	$\frac{-2\cdot 47}{7\cdot 151}$	0	0	0
2		$\frac{2^2}{17\cdot 29}$	$\frac{1}{3^3\cdot 5}$	0	0	0
3			$\frac{-2}{7\cdot 151}$	0	0	0
4				$\frac{47}{2\cdot 3\cdot 23}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
5					0	0
6						0

$0,025613\ldots$

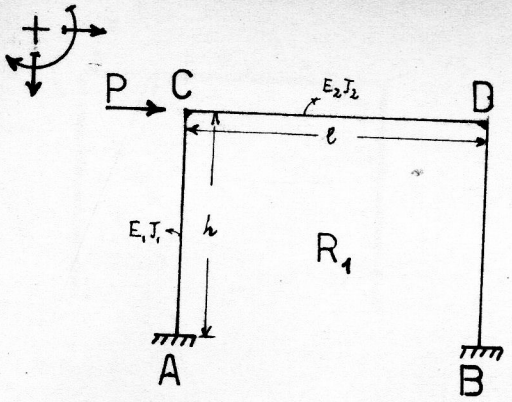
1	$\frac{2^3\cdot 3}{937}$	$\frac{1}{2^3\cdot 11}$	$\frac{2^2\cdot 3}{7\cdot 151}$	0	0	0
2		$\frac{-2^3\cdot 3}{17\cdot 29}$	$\frac{-2}{3^2\cdot 5}$	$\frac{-1}{23}$	0	0
3			$\frac{2^2\cdot 3}{7\cdot 151}$	$\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5}$	0	0
4				$\frac{-1}{23}$	0	0
5					$\frac{2^2\cdot 3}{47}$	$\frac{1}{4}$
6						0

$-0,00881629\ldots$

1	$\frac{-2\cdot 5\cdot 19}{23\cdot 937}$	$\frac{-1}{2\cdot 11\cdot 23}$	$\frac{-2}{7\cdot 151}$	0	0	0
2		$\frac{71}{2\cdot 3\cdot 17\cdot 29}$	$\frac{1}{3^3\cdot 5}$	$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 23}$	0	0
3			$\frac{-2\cdot 47}{7\cdot 151}$	$\frac{-2^2}{3^2\cdot 5}$	$\frac{-2}{23}$	0
4				$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 23}$	0	0
5					$\frac{-2}{47}$	0
6						$\frac{1}{3}$

TELAIO PIANO INCASTRATO	METODO DELLE INTERDIZIONI
spinta orizzontale sulla trave	**TAVOLA VI**

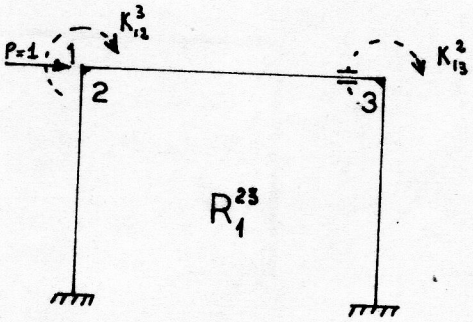
versi



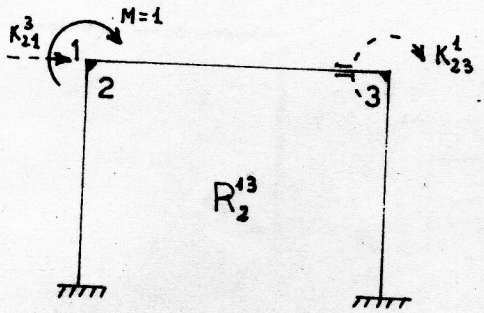
$$W_t = \frac{4E_2J_2}{\ell}$$

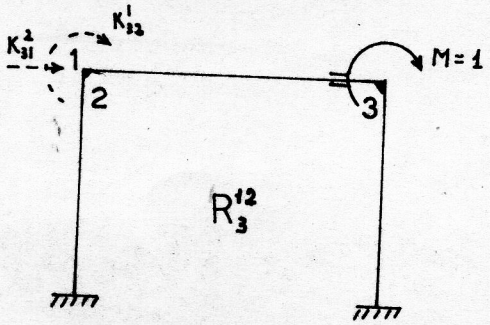
$$W_p = \frac{4E_1J_1}{h} \qquad \theta = \frac{E_1J_1\ell}{E_2J_2h} = \frac{W_p}{W_t}$$

$$U_p = \frac{12E_1J_1}{h^3}$$



	δ_1^*	φ_2^*	φ_3^*
R_1^{23}	$\frac{1}{2U}$	0	0
R_2^{13}	0	$\frac{1}{W_t+W_p}$	0
R_3^{12}	0	0	$\frac{1}{W_t+W_p}$





	1	2	3	
1		$\frac{-h}{4}$	$\frac{-h}{4}$	$\frac{8(\theta+1)}{(5\theta+8)}$
2	$\frac{-3\theta}{2h(\theta+1)}$		$\frac{1}{2(\theta+1)}$	$\frac{4(\theta+1)^2}{(2\theta+3)(2\theta+1)}$
3	$\frac{-3\theta}{2h(\theta+1)}$	$\frac{1}{2(\theta+1)}$		

α_{13}^2 α_{23}^1

	1	2	
1		$\frac{-h(2\theta+1)}{(5\theta+8)}$	$\frac{(2\theta+3)(5\theta+8)}{4(\theta+1)(\theta+6)}$
2	$\frac{-3\theta}{h(2\theta+3)}$		

α_{12}

$$\frac{\delta_1}{P} =$$

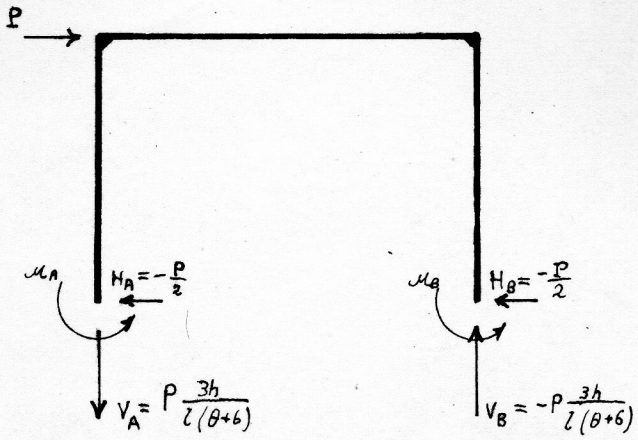
1	$\frac{h^3 (2\theta+3)}{12E_1J_1(\theta+6)}$	$\frac{4(\theta+1)}{U_p(5\theta+8)}$	$\frac{1}{2U_p}$
2		0	0
3			0

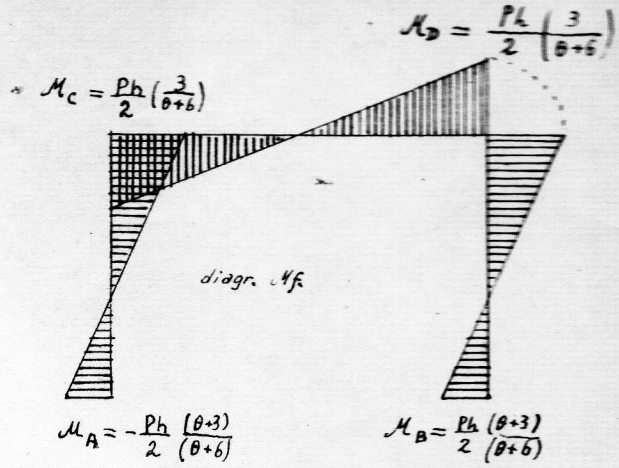
$$\frac{\varphi_2}{P} =$$

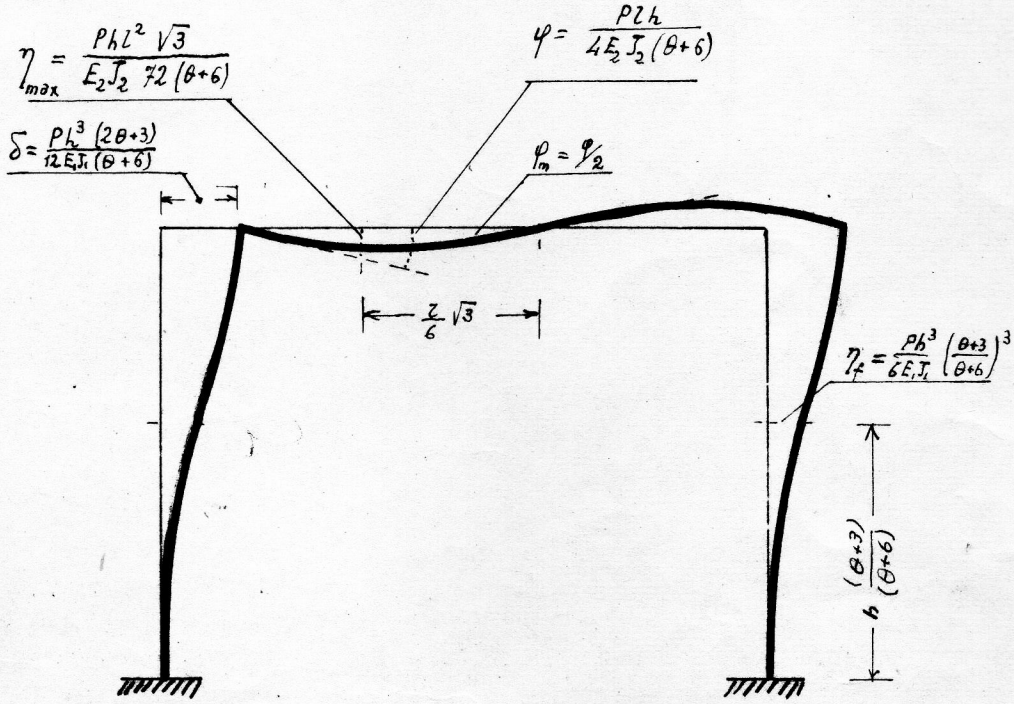
1	$\frac{lh}{4E_2J_2(\theta+6)}$	0	0
2		$\frac{4(\theta+1)}{W_t(2\theta+3)(2\theta+1)}$	$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$
3			0

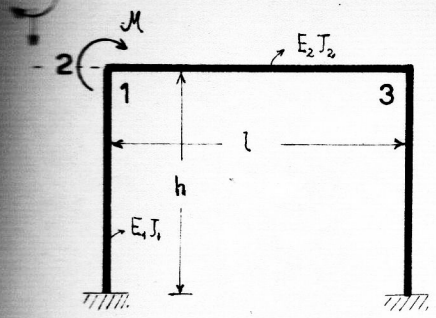
$$\frac{\varphi_3}{P} =$$

1	$\frac{lh}{4E_2J_2(\theta+6)}$	$\frac{2h}{W_t(5\theta+8)}$	0
2		$\frac{-2}{W(2\theta+3)(2\theta+1)}$	0
3			$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$


P
M_A
$H_A = -\frac{P}{2}$
$V_A = P\frac{3h}{l(\theta+6)}$
M_B
$H_B = -\frac{P}{2}$
$V_B = -P\frac{3h}{l(\theta+6)}$

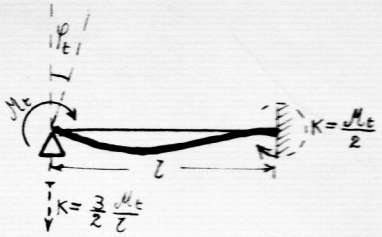

$M_D = \frac{Ph}{2}\left(\frac{3}{\theta+6}\right)$
$M_C = \frac{Ph}{2}\left(\frac{3}{\theta+6}\right)$
diagr. M_f
$M_A = -\frac{Ph}{2}\frac{(\theta+3)}{(\theta+6)}$
$M_B = \frac{Ph}{2}\frac{(\theta+3)}{(\theta+6)}$


$\eta_{max} = \frac{Phl^2\sqrt{3}}{E_2 J_2\, 72(\theta+6)}$
$\varphi = \frac{Plh}{4E_2 J_2(\theta+6)}$
$\delta = \frac{Ph^3(2\theta+3)}{12E_1 J_1(\theta+6)}$
$\varphi_m = \varphi/2$
$\frac{l}{6}\sqrt{3}$
$\eta_f = \frac{Pb^3}{6E_1 J_1}\left(\frac{\theta+3}{\theta+6}\right)^3$
$b\frac{(\theta+3)}{(\theta+6)}$



$$W_t = \frac{4E_2J_2}{l} = \frac{M_t}{\varphi_t}$$

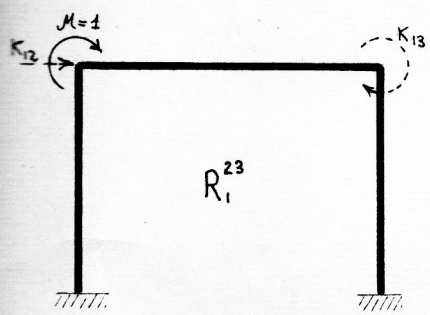
$$W_p = \frac{4E_1J_1}{h} = \frac{M_p}{\varphi_p}$$



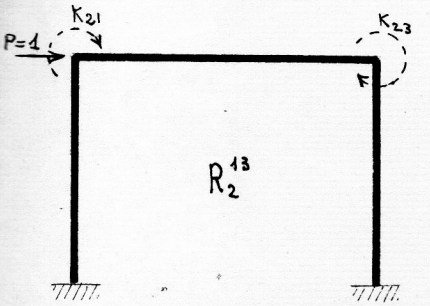
$$U_p = \frac{12E_1J_1}{h^3} = \frac{P}{\delta}$$



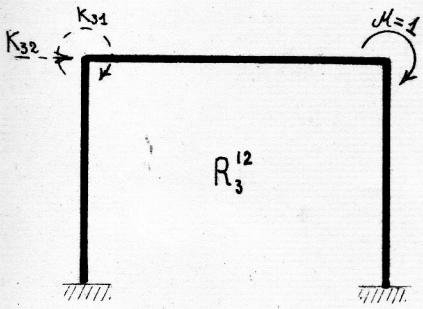
$$\theta = \frac{W_p}{W_t} = \frac{E_1J_1l}{E_2J_2h}$$



	φ_1^*	δ_2^*	φ_3^*
R_1^{23}	$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$	0	0
R_2^{13}	0	$\frac{1}{2U_p}$	0
R_3^{12}	0	0	$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$



	1	2	3	
1		$\frac{-3\theta}{2h(\theta+1)}$	$\frac{1}{2(\theta+1)}$	$\frac{4(\theta+1)^2}{(2\theta+3)(2\theta+1)}$ α_{13}^2
2	$\frac{-h}{4}$		$\frac{-h}{4}$	$\frac{8(\theta+1)}{(5\theta+8)}$ α_{23}^1
3	$\frac{1}{2(\theta+1)}$	$\frac{-3\theta}{2h(\theta+1)}$		



	1	2	
1		$\frac{-3\theta}{h(2\theta+3)}$	$\frac{(2\theta+3)(5\theta+8)}{4(\theta+1)(\theta+6)}$ α_{12}
2	$\frac{-h(2\theta+1)}{(5\theta+8)}$		

$$K_{12}\alpha_{12} = \frac{-3\theta(5\theta+8)}{4h(\theta+1)(\theta+6)}$$

$$\frac{\varphi_1}{M} = \boxed{\frac{l}{4E_2J_2}\ \frac{(5\theta+8)}{(2\theta+1)(\theta+6)}}$$

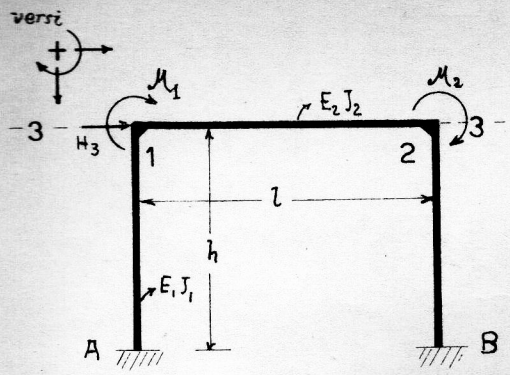
$$\frac{\delta_2}{M} = \boxed{\frac{h^2}{4E_1J_1}\ \frac{\theta}{(\theta+6)}}$$

$\frac{\varphi_3}{M} =$

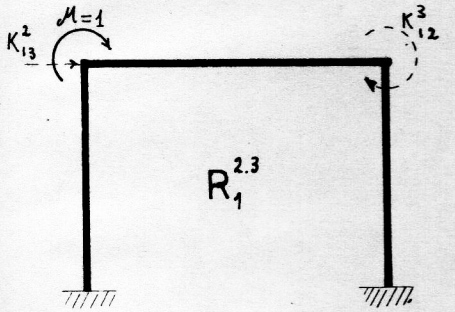
1	$\frac{l}{4E_2J_2}\ \frac{(3\theta-4)}{(2\theta+1)(\theta+6)}$	$\frac{-2}{W_t(2\theta+3)(2\theta+1)}$	0
2		$\frac{2h}{W_t(5\theta+8)}$	0
3			$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$

TAVOLA VII

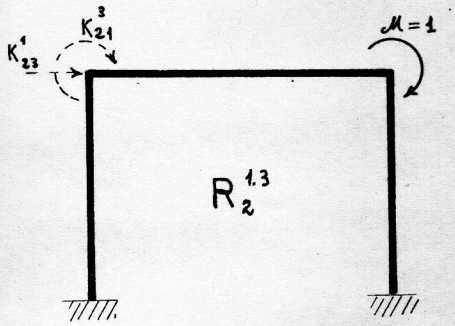
TELAIO PIANO INCASTRATO	METODO DELLE INTERDIZIONI
Calcolo delle formule generali	**TAVOLA VIII**



	φ_1^*	φ_2^*	δ_3^*
$R_1^{2.3}$	$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$	0	0
$R_2^{1.3}$	0	$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$	0
$R_3^{1.2}$	0	0	$\frac{1}{2\,U_p}$

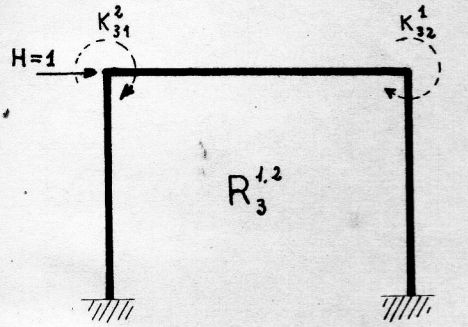


	1	2	3	
1		$\frac{1}{2(\theta+1)}$	$\frac{-3\theta}{2h(\theta+1)}$	$\frac{8(\theta+1)}{(5\theta+8)}$ α_{13}^2
2	$\frac{1}{2(\theta+1)}$		$\frac{-3\theta}{2h(\theta+1)}$	$\frac{8(\theta+1)}{(5\theta+8)}$ α_{23}^1
3	$\frac{-h}{4}$	$\frac{-h}{4}$		



	1	2	
1		$\frac{-(3\theta-4)}{(5\theta+8)}$	$\frac{(5\theta+8)^2}{8(\theta+6)(2\theta+1)}$ α_{12}
2	$\frac{-(3\theta-4)}{(5\theta+8}$		

$$\alpha_{12}\,K_{12} = -\frac{(3\theta-4)(5\theta+8)}{8(2\theta+1)(\theta+6)}$$

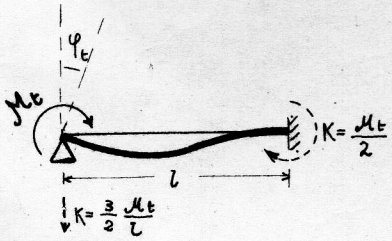


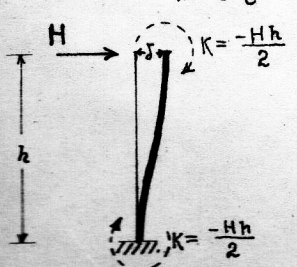
$$\left(\frac{\varphi_1}{M}\right) = 1$$

$\frac{l}{4E_2J_2}$	$\frac{(5\theta+8)}{(2\theta+1)(\theta+6)}$	$\frac{8}{W_t(5\theta+8)}$	$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$

$$\left(\frac{\varphi_2}{M}\right) = 1$$

$\frac{l}{4E_2J_2}$	$\frac{(3\theta-4)}{(2\theta+1)(\theta+6)}$		
2	$\frac{8}{W_t(5\theta+8)}$	$\frac{1}{W_t(\theta+1)}$	





$$\left(\frac{J_3}{M}\right) = 1$$

$\frac{h^2}{4E_1J_1}$	$\frac{\theta}{(\theta+6)}$	$\frac{\theta h^2}{2E_1J_1(5\theta+8)}$	0
2		$\frac{\theta h^2}{2E_1J_1(5\theta+8)}$	0
3			$\frac{h^3}{24E_1J_1}$

$$W_t = \frac{4E_2J_2}{l} = \frac{M_t}{\varphi_t}$$

$$W_p = \frac{4E_1J_1}{h} = \frac{M_p}{\varphi_p}$$

$$U_p = \frac{12E_1J_1}{h^3} = \frac{H}{\delta}$$

$$\theta = \frac{W_p}{W_t} = \frac{E_1J_1\,l}{E_2J_2\,h}$$

Calcolo delle grandezze ausiliarie F

$$\boxed{F_3 = H_3}$$

$$F_2 = \mathcal{M}_2 - H_3 K_{32}^1 = \boxed{F_2 = \mathcal{M}_2 + \frac{H_3 h}{4}}$$

$$F_1 = \mathcal{M}_1 - F_2 K_{21} - F_3 K_{31}^2$$

$$F_1 = \mathcal{M}_1 - \left(\mathcal{M}_2 + \frac{H_3 l}{4}\right)\left(\frac{(3\theta-4)}{(5\theta+8)}\right) + \frac{H_3 h}{4}$$

$$\boxed{F_1 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \frac{(3\theta-4)}{(5\theta+8)} + H_3 h \frac{(2\theta+1)}{(5\theta+8)}}$$

Calcolo degli spostamenti

$$\varphi_1 = F_1 \varphi_{(1)1}$$

(1) $$\boxed{\varphi_1 = \frac{l}{4E_2J_2}\left[\frac{(5\theta+8)\mathcal{M}_1 + (3\theta-4)\mathcal{M}_2}{(2\theta+1)(\theta+6)} + \frac{h H_3}{(\theta+6)}\right]}$$

$$\varphi_2 = F_1 \varphi_{(1)2} + F_2 \varphi_{(2)2}$$

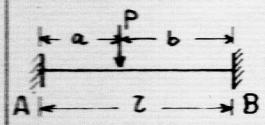
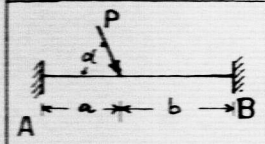
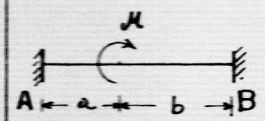
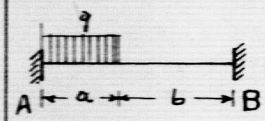
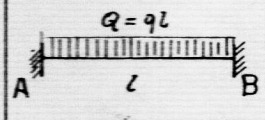
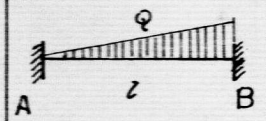
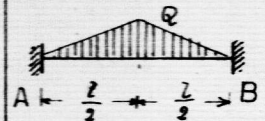
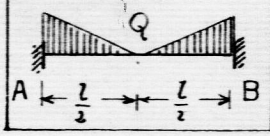
(1) $$\boxed{\varphi_2 = \frac{l}{4E_2J_2}\left[\frac{(3\theta-4)\mathcal{M}_1 + (5\theta+8)\mathcal{M}_2}{(2\theta+1)(\theta+6)} + \frac{h H_3}{(\theta+6)}\right]}$$

$$\delta_3 = F_1 \delta_{(1)3} + F_2 \delta_{(2)3}^1 + F_3 \delta_{(3)3}^{1,2}$$

$$\delta_3 = \left(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \frac{(3\theta-4)}{(5\theta+8)} + H_3 h \frac{(2\theta+1)}{(5\theta+8)}\right)\left(\frac{l^2\,\theta}{4E_1J_1(\theta+6)}\right) + \left(\mathcal{M}_2 + \frac{H_3 h}{4}\right)\left(\frac{\theta h^2}{2E_1J_1(5\theta+8)}\right) + H_3\left(\frac{h^3}{24E_1J_1}\right)$$

(1) $$\boxed{\delta_3 = \frac{h^2}{4E_1J_1}\left[(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)\frac{\theta}{(\theta+6)} + H_3 h \frac{(2\theta+3)}{3(\theta+6)}\right]}$$

TABELLA DEI MOMENTI DI INCASTRO PERFETTO

Schema di carico	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_B$	valori da sostituire nelle formule (1)		
			M_1	M_2	H_3
	$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$	$+\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$	0
	$-\frac{Pab^2 \operatorname{sen}\alpha}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b \operatorname{sen}\alpha}{l^2}$	$+\frac{Pab^2 \operatorname{sen}\alpha}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b \operatorname{sen}\alpha}{l^2}$	$P \cos\alpha$
	$\frac{Mb(2l-3b)}{l^2}$	$-\frac{Ma(2l-3a)}{l^2}$	$-\frac{Mb(2l-3b)}{l^2}$	$-\frac{Ma(2l-3a)}{l^2}$	0
	$-\frac{qa^2(6l^2-8la+3a^2)}{12l^2}$	$-\frac{qa^3(4l-3a)}{12l^2}$	$+\frac{qa^2(6l^2-8la+3a^2)}{12l^2}$	$-\frac{qa^3(4l-3a)}{12l^2}$	0
	$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$+\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	0
	$-\frac{Ql}{15}$	$-\frac{Ql}{10}$	$+\frac{Ql}{15}$	$-\frac{Ql}{10}$	0
	$-\frac{5Ql}{48}$	$-\frac{5Ql}{48}$	$+\frac{5Ql}{48}$	$-\frac{5Ql}{48}$	0
	$-\frac{Ql}{16}$	$-\frac{Ql}{16}$	$+\frac{Ql}{16}$	$-\frac{Ql}{16}$	0

N.B. I valori di $\bar{M}_A$ ed $\bar{M}_B$ hanno il segno secondo la convenzione ordinaria.